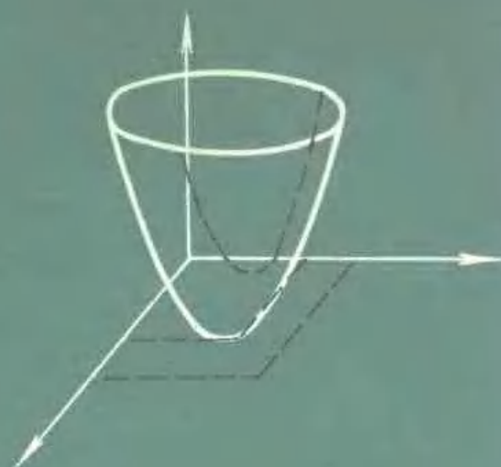
非线性最优化引论

INTRODUCTION TO NONLINEAR OPTIMIZATION

[美] D. A. Wismer　R. Chattergy 合著





北京工业学院出版社

非线性最优化引论

〔美〕D.A.Wismer
R.Chattergy 合著

邓乃扬 刘宝光 等译

北京工业学院出版社

内 容 简 介

本书内容涉及到了非线性最优化的各个领域，但对深度做了恰当的选择；着力于讲解各种方法的思想，而并不追求于数字的严谨性；并且多用例题及有典型意义的题目来阐述概念。图文并茂、直观性很强。不仅适宜于学生和初学者，即使教师和熟悉该学科内容的读者也会从本书的内容中得益。

本书由多人分章翻译：刘宝光(一，附录)，陈菊英（二），周瑞珍(三)，赵广琴（四，五），丁丽娟（六，七），邓乃扬（八，九），王新民（十，十一），马国瑜(十二，十三)。另外，许金伟也参加了部分译稿的整理工作。

INTRODUCTION TO
NONLINEAR OPTIMIZATION
A Problem Solving Approach
Elsevier North-Holland, Inc., New York, 1978

非线性最优化引论

〔美〕D.A.Wismer
R.Chattergy 合著

邓乃扬 刘宝光 等译

北京工业学院出版社出版
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
通县向阳印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本 14.375印张 321千字
1987年6月第一版 1987年6月第一次印刷
印数：1—5,000 册
统一书号：13434·56 定价：2.35 元

序　言

十多年来，作者讲授非线性最优化，对象是工程和商业行政系科的大学生、研究生和进修生。这一题材本质上涉及到许多学科，但还没有一种共认的理论。在这许多有关学科中，有些学科有性质十分不同的多种数学理论体系，基础在微积分，但也涉及许多近代的理论成果；有大量的、种类繁多的计算算法；以及理论、计算和应用的无穷尽的专门例子。

我们的目的，是在不要求广泛的数学预备知识的前提下，将这些各式各样的材料组织在一个引论性的教程中。为了达到这一目标，开始时我们使用过各种现成的教材，以广泛的注释、例题和习题作为补充。在教学过程中，这些补充材料逐渐取代着教材，而教材则逐渐降到补充材料的地位，最后产生了初步满足我们需要的这本教科书。

本书的主要目标之一，是通过广泛地使用例题、示例性的题解和附有答案的补充题，使读者对于非线性最优化问题的提法和解法有直观和深入的了解。

在这本教科书中，我们对于组成非线性最优化课题的大多数主要领域，提供了一个简明的讨论。这些领域包括：

源自微积分的古典无约束最优化方法。

使用 Lagrange 乘子加进约束项而产生的鞍点。

Kuhn-Tucker 理论、对偶性，以及它与古典方法的联系。

一维搜索算法和计算结果。

约束和无约束问题的梯度搜索算法。

惩罚函数和有关的计算方法。

共轭方向算法和二次收敛性。

有二次目标函数和线性约束问题的专门理论和计算方法。

线性规划概念和解法概述。

只取整数值解的问题的表述和求解。

多阶段决策问题及其动态规划解法。

处理高维问题的分解和谱系方法。

另外，书中共有122个例题，153道示例性的附有解答的习题和136道补充题，补充题的答案附在书的最后。

本书内容的这一取舍，是想通过非线性最优化理论基础的研究，与实际要求获得计算解这二者之间找出一个适当的处理办法。有时，这两个领域是不能区分的；而本书从头至尾，始终通过大量地使用数值例子、示例性的有解答的习题，达到使读者对内容直观而深入地了解。这些例子和有解答的习题作为一种手段，用以扩展在各章中只简要讨论过的内容，以及使用那些材料去求解有关的问题。

我们想本书可以用作关于非线性最优化课题的介绍性的教科书。除此之外，它也可以作为更高级的非线性最优化教程的一个有用的补充，大量的例子和有解答的习题对于学生和教师都是有帮助的。

作者向帮助过我们的许多学生表示感谢。这些年来，他们帮助形成了本书，并且为许多已解的习题和例题付出了劳动。特别要提到以前的助教 P.Bansal 博士，对他杰出的努力致以谢意。

David A. Wismer

R. Chattergy

目　　录

第一章 最优化问题

在可能的条件下，如何以最好的方式做事情，就是最优化所探讨的问题。不言而喻，问题的这种解决办法是人们十分想得到的，近年来受到越来越大的重视。当然，很久以来数学家们就在研究求得最优解的方法，或许早在 Descartes 和 Fermat 就开始了，他们在十七世纪，甚至在 Newton 建立微积分之前，就研究过这样的问题。

最优化问题的解如果不随时间变化，则称这类问题为**静态最优化**或**非线性规划**。一个非线性规划问题，用一组代数方程或超越方程来描述，这组方程称为数学模型，或简称为模型。问题的解当然仅仅对于它的模型来说是最优的。因此，对于一个实在的系统，为了能得到近于最优的解，或者甚至仅仅为求得可用的解(常常是如此)，所取的模型**必须密切地近似真实系统的性能**。

描述对应于任意指定解的利润或利益的式子，叫做**目标函数**，也常称作成本函数或性能指标函数。当系统模型和目标函数都是线性式时，就是**线性规划问题**。

如果最优化问题的解是时间的函数，则称这类问题为**动态最优化**。这时，问题的数学模型，最常由一组微分方程和一个目标函数组成，后者可以是一个积分。描述这类问题的解法的数学理论，从几个彼此相容的观点发展起来，产生了诸如变分法、动态规划、以及 Pontryagin 极大值原理等名目。对于连续的时间变数，如果仅考虑它的若干个离散的

点，动态最优化问题可以用非线性规划近似地叙述和求解。

对于大多数有实际意义的最优化问题，它的解必须满足描述该实在系统的模型中所给出的限制，并且使目标函数取值最大或最小。这类问题，对静态和动态两种情形，均称为**约束最优化问题**。约束问题中，系统的数学模型代表约束。按照各约束式中是出现等号(=)、还是不等号(≥，≤)又可以将约束进一步分成**等式约束**和**不等式约束**。在有些情况下不出现约束，问题仅由目标函数构成，称为**无约束最优化问题**。

一、数学预备知识

在开始叙述正文之前，先规定一些记号，并且给出某些数学预备知识。

本书所涉及的函数几乎都是向量变数的可微函数。于是除非另有说明，否则$f(\mathbf{x})$都是表示f是一个实值函数，$\mathbf{x}$则是变数的n维组。因此

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

以及

$$\mathbf{x}^T=[x_1, x_2 \cdots x_n]$$

如果需要指出f是不止一次可微的，将专门指明。如果$\mathbf{x}$是在某一特定点计值，则用下标或上标表示。即如$\mathbf{x}_0$、$\mathbf{x}_1$或$\mathbf{x}^*$表明n维变数$\mathbf{x}$是一组特定的数。一般地说，我们保留$\mathbf{x}^*$用来代表最优解。

1.2 n维欧氏空间 由实数的所有的 n 元组所构成的集合，记作 E^n，称为 n 维空间。在 E^n 中，如果通常的向量加法规则(平行六面体法则)和标量同向量的乘法规则都适用，并且对于 E^n 中任意二向量x和y，有用下式定义的**距离**

$$||\mathbf{x}-\mathbf{y}||=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

则称E^n 为 n **维欧氏空间**①。当y=0，有

$$||\mathbf{x}||=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$$

称为 x 的范数或大小。

如无特别指明，则$\mathbf{x}\in E^n$。E^1 是整个实数轴，E^2 是平面，E^3 是我们生活于其中的空间等等。对于 $n>3$ 的情形，E^n 较难想象。

两个向量 $\mathbf{x}\in E^n$、$\mathbf{y}\in E^n$ 的**内积**(或**点积**)，是将它们的对应元素相乘后再相加所得的标量，即

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i$$

如果二向量的内积为零，即 $\mathbf{x}^T\mathbf{y}=0$，则称他们是**正交的**。

由内积和欧氏范数的性质得知，对于任意的 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y}\in E^n$，有

$$|\mathbf{x}^T\mathbf{y}|\leqslant||\mathbf{x}||\,||\mathbf{y}||$$

其中等号当且仅当$\mathbf{x}=\alpha\mathbf{y}$时成立，$\alpha$ 是标量。这一重要的关系式称为**Schwarz 不等式**。

向量组$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots\mathbf{x}_n$，如果关系式

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{x}_i=0$$

---

①欧氏空间的严格定义可见有关的线性代数书籍——译者

总是蕴函$\alpha_i=0$，$i=1, 2, \cdots, n$，则称这些向量是**线性无关**的。

线性向量空间E^n中的向量集合S，如果(1)S的所有向量线性无关，(2)E^n中的每一个向量都可以表示成S中各向量的线性组合，则称S是E^n的一组**基**。

一个向量集合，如果E^n中的任一向量都可以表示成该集合中向量的线性组合，则称它生成向量空间E^n。例如，向量$x_1=(1,0,0)$，$x_2=(0,1,0)$，$x_3=(0,0,1)$，和$x_4=(1,1,0)$生成E^3，但它们不构成一组基，但是，上述前三个向量构成一组基，而且生成E^3。

2. 凸性　凸集和凸函数的概念在最优化中是特别重要的。为了建立这些概念，我们首先定义**直线**。

过E^n中二不同点x_1、x_2的直线定义作集合

$$X=\{x|x=\lambda x_2+(1-\lambda)x_1，所有\lambda\}，$$

其中λ是标量。如果$0\leqslant\lambda\leqslant1$，则$X$表示连结$x_1$和$x_2$的**线段**。

例1-1　在图1-1中给出了当$x\in E^2$时，上述集合X定义

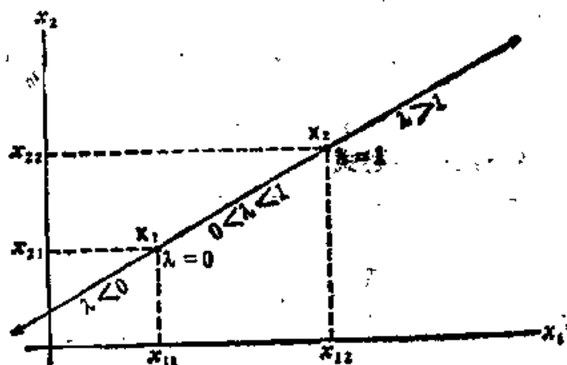


图1-1

一条直线的情形。

集合 X，如果对于其中的任意二点$\mathbf{x}_1$和$\mathbf{x}_2$，连结两点的线段也在此集合中，则称X是**凸的**。

例1-2　图1-2中(a)、(b)所给出的两个集合是凸的，(c)、(d)给出的集合不是凸的。

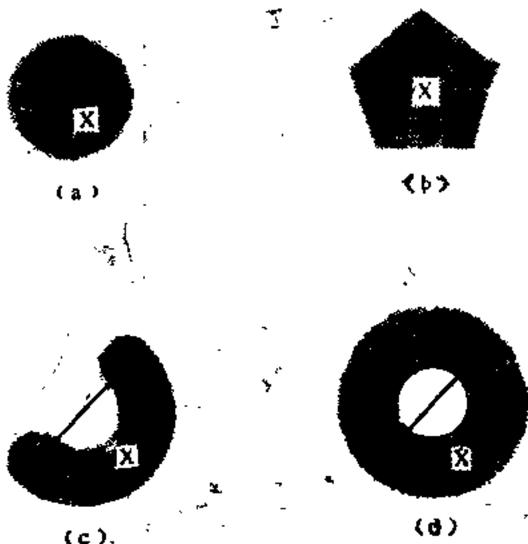


图 1-2

E^n 中的**超平面**定义作下述点集

$$X=\{\mathbf{x}\mid \mathbf{c}^T\mathbf{x}=z\}$$

其中$\mathbf{c}\neq 0$，是n维向量，z是常数。一个超平面将E^n分割为两个**闭半空间**，即

$$X=\{\mathbf{x}\mid \mathbf{c}^T\mathbf{x}\geqslant z\} \quad 和 \quad X=\{\mathbf{x}\mid \mathbf{c}^T\mathbf{x}\leqslant z\}$$

当不等式严格成立时，X是**开半空间**。

例1-3　超平面

$$X=\{\mathbf{x}\mid 2x_1+x_2=3\}$$

将E^2分为半空间X_1和X_2，见图1-3。如果$z=0$，则超平面通过原点。

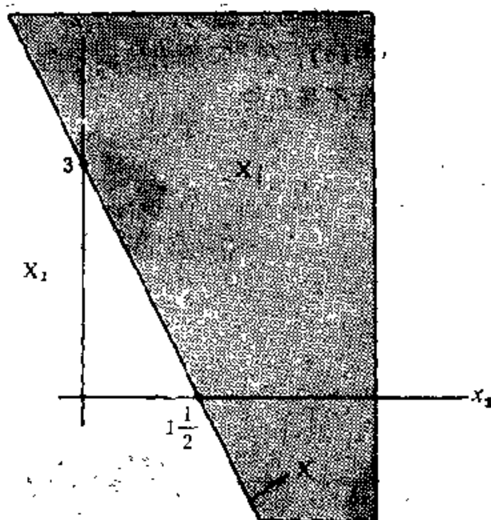


图 1-3

［解］ 在E^n中给定超平面$\mathbf{c}^T\mathbf{x}=z$，向量$\mathbf{c}$称为该超平面的**法向量**。这就是说，向量$\mathbf{c}$正交于该超平面内的任意向量。

例1-4 对于超平面$X=\{\mathbf{x}|-2x_1+x_2=0\}$，

$$\mathbf{c}=\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}，向量\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}在超平面内。这时$$

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}=(1)(-2)+(2)(1)=0$$

二向量正交(垂直，见图1-4)。

［解］ 一类重要的超平面称为**支撑超平面**。凸集X，给定一个边界点$\mathbf{w}$，超平面$\mathbf{c}^T\mathbf{x}=z$如果满足：$\mathbf{c}^T\mathbf{w}=z$，并且X的所有点都属于这一超平面的一个闭半空间，则称此超平面

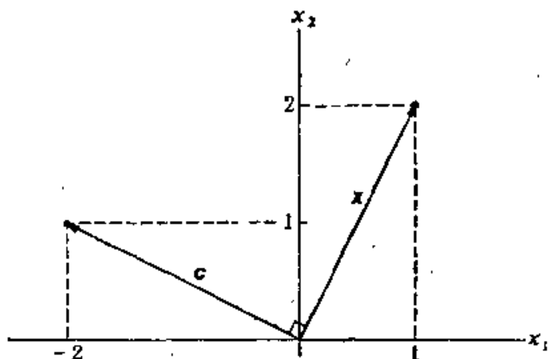


图 1-4

为X在点$\mathbf{w}$的支撑超平面。也就是说，对于所有的$\mathbf{x}\in X$，$\mathbf{c}^T\mathbf{x}\geqslant z$，或者，对于所有的$\mathbf{x}\in X$，$\mathbf{c}^T\mathbf{x}\leqslant z$。

例 1-5 在E^2中，凸集的支撑超平面是该集合在某个边界点的切线；在E^3中，则是在某个边界点的切平面(见图1.5)。

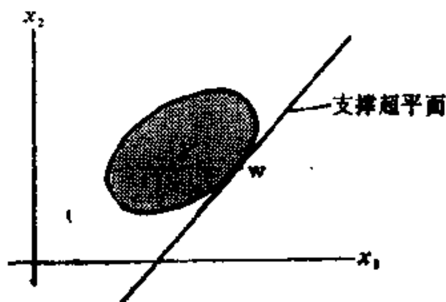


图 1-5

［解］ 函数$f(\mathbf{x})$，如果对于E^n中的凸集X的任意二点$\mathbf{x}_1$和$\mathbf{x}_2$，对于所有的λ，$0\leqslant\lambda\leqslant1$，都有

$$f(\lambda x_2+(1-\lambda)x_1)\leqslant\lambda f(x_2)+(1-\lambda)f(x_1)$$

则称$f(x)$为凸集X上的**凸函数**。

如果上述定义中，当$0<\lambda<1$及$x_1\neq x_2$时，成立严格的不等式，则称函数是**严格凸的**。

类似地，将不等式反向，以同样方式可以定义**凹函数**。线性函数在整个E^n中既是凸的又是凹的。但它既不是严格凸的，也不是严格凹的。

例1-6 考虑如图 1-6所示的一元函数。对于所有的λ，$0\leqslant\lambda\leqslant1$，函数曲线在连结二点$(x_1, f(x_1))$、$(x_2, f(x_2))$的线段的下方，因此函数是凸的；事实上，也是严格凸的。

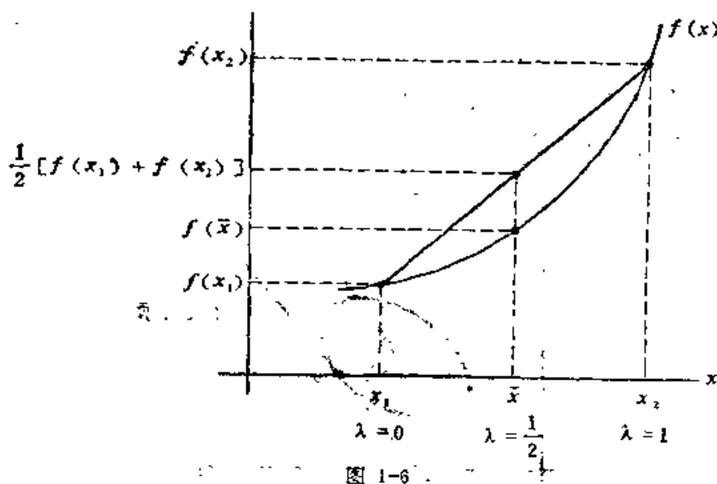


图 1-6

［证］ 从定义可见，如果$f(x)$是(严格)凸的，那么$-f(x)$是(严格)凹的，反之亦然。这样一来，仅发展(比如说)凸函数的理论就够了，因为可以简单地将任意凹函数转化为凸函数。

例1-7 在图1-7中，函数 $f(\mathrm{x})$ 是凸的，而 $-f(\mathrm{x})$ 是凹的。凸函数 $f(\mathrm{x})$ 的最小值点 x^* 也就是凹函数 $-f(\mathrm{x})$ 的最大值点。但这两个函数在那点的函数值是不同的，而是 $\min f(\mathrm{x}) = -\max[-f(\mathrm{x})]$。这一命题在一般情形也成立。

［**证**］ 注意，凸函数的定义中仅要求函数在一凸集上有定义，既不要求函数 $f(\mathrm{x})$ 是连续的，也不要求是可微的。

可微函数 $f(\mathrm{x})$ 的**梯度**是由偏导数组成的 n 维向量

$$\nabla f(\mathrm{x}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathrm{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathrm{x}), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathrm{x})\right]^T$$

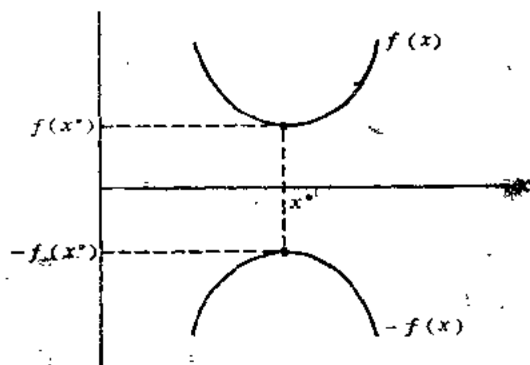


图 1-7

如果 $f(\mathrm{x})$ 还具有二阶偏导数，其**Hesse 矩阵**是由二阶偏导数组成的 $n\times n$ 对称矩阵

$$\mathrm{H}(\mathrm{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathrm{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathrm{x}) \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathrm{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathrm{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathrm{x}) \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathrm{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathrm{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathrm{x}) \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathrm{x}) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{H}(\mathbf{x})$的对称性由混合偏导数与求导的次序无关这一事实推出，即

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \qquad i, j=1, 2, \cdots, n$$

如果 $\mathbf{u}$ 是 E^n 中的单位向量(亦即 $\|\mathbf{u}\|=1$)，那么 $f(\mathbf{x})$ 的**方向导数**定义作

$$\lim_{\tau \to 0}\frac{f(\mathbf{x}+\tau\mathbf{u})-f(\mathbf{x})}{\tau}=\nabla f(\mathbf{x})^T\mathbf{u}$$

函数 $f(\mathbf{x})$ 的方向导数是它在 $\mathbf{u}$ 方向上的瞬间变化率。

例1-8 在点 $x=1, y=1$ 处求函数 $f(x, y)=x^2+2y^2$ 在方向 $\mathbf{d}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ 上的方向导数。

[解] $\nabla f(x, y)=\begin{bmatrix}2x\\4y\end{bmatrix}$ 且 $\nabla f(1,1)=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$

必须把方向向量变为单位向量，为此，进行**规范化**，即用范数 $\|\mathbf{d}\|$ 去除 $\mathbf{d}$，得到

$$\mathbf{u}=\frac{\mathbf{d}}{\|\mathbf{d}\|}=\frac{1}{\sqrt{1^2+3^2}}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{10}\\3/\sqrt{10}\end{bmatrix}$$

现在 $\|\mathbf{u}\|=\sqrt{(1/\sqrt{10})^2+(3/\sqrt{10})^2}=1$，在 $x=1$，$y=1$ 处的方向导数是

$$\nabla f(1,1)^T\mathbf{u}=2(1/\sqrt{10})+4(3/\sqrt{10})=14/\sqrt{10}$$

在最优化问题中，一类重要的函数是**二次型**。一个二次型是一个 n 元函数，可以写作如下形式

$$f(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,x_i\,x_j$$

其中 a_{ij} 是常数。用矩阵——向量记号，该二次型可以写成

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$$

其中$\mathbf{A}[a_{ij}]$，是$n\times n$对称矩阵。注意向量和矩阵的这一组合的值总是标量。

例1-9 二次型如

(a) $x_1^2+x_1x_2+3x_2^2$，(b) $x_1^2+x_1x_2+4x_1x_3+2x_3^2$，(c) $x_1^2+2x_2^2+3x_3^2$，或者用矩阵形式表为$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$，这里

(a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 2 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$\mathbf{A}$ 的矩阵表达式不是唯一的。但是，不失一般性，$\mathbf{A}$ 总可以取作是对称的。

例1-10 在例1-9(a)中，形式如

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & b \\ a & 3 \end{bmatrix}$$

的任意一个矩阵表达式，只要满足$a+b=1$，都能准确地表示出这一二次型。从满足上述条件的无限多个矩阵中，我们总可以选取对称矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & c \\ c & 3 \end{bmatrix}$$

其中 $c=\frac{a+b}{2}=0.5$

［解］ 二次型 x^TAx，如果对于每个x，除去 $x=0$(即$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$)外，都有 $x^TAx>0$，则称作是**正定的**。

如果对于每个 x，有 $x^TAx\geqslant0$，并且总存在 $x\neq0$，使$x^TAX=0$，则称二次型是**半正定的**。

只要反转有关不等式的方向，可以类似地定义**负定**和**半负定**。

如果二次型的值对于 x 的某些值是正的，而对于另外一些x值又是负的，则称二次型是**不定的**。

例1-11 判别使二次型$z=x^TAx$为正、为负的区域，并确定二次型的类型。

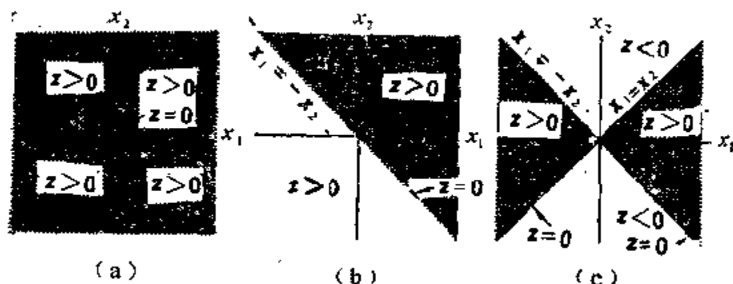


图1-8

［解］ 从图1-8知：

(a) $z=x_1^2+x_2^2$ 是正定的，因为除去$x_1=x_2=0$ 的情形外，z 都是正的。

(b) $z=(x_1+x_2)^2$是半正定的，因为除去$x_1=-x_2$(此时$z=0$)外，z都是正的。

(c) $z=x_1^2-x_2^2$ 是不定的，因为当$|x_1|>|x_2|$时z 是正的，而对于$|x_1|<|x_2|$，z是负的。

3． **可微函数的凸性** 对于可微函数$f(x)$，可以用下列

定理确定它的凸性。

定理1-1 设$f(X)$是凸集$X \subset E^n$上的可微函数。那么，$f(X)$在X上是凸的，当且仅当对于任意的x^1、$x^2 \in X$，都有

$$f(x^2)-f(x^1) \geqslant \nabla f(x^1)(x^2-x^1)$$

定理1-2 设$f(x)$是开凸集$X \subset E^n$上的二次可微函数。那么，$f(x)$在X是凸的，当且仅当对于每个$X \in X$，Hesse矩阵$H(x)$都是半正定的。

定理1-3 设$f(x)$是开集$X \subset E^n$上的二次可微函数。如果对于每个$x \in X$，Hesse矩阵都是正定的，那么$f(x)$在X上是严格凸的。注意这一条件是充分的，但不是必要的。

4. Sylvester定理 为了确定一个二次型是不是正定的，可以用下述定理。

Sylvester 定理 二次型$x^T H x$是正定的，当且仅当矩阵H的所有顺序主子式都是正的。

顺序主子式是将矩阵逐次删去底部的行和右边的列而得的子方阵的行列式。一个$n \times n$矩阵有n个这样的主子式。例如，如果

$$H=\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$$

那么这三个主子式就是下面三个行列式

$$h_{11}, \quad \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{vmatrix}$$

如果二次型$-x^T H x$是正定的，那么$x^T H x$是负定的。由于

$$-\mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{x}=\mathbf{x}^T(-\mathbf{H})\mathbf{x}$$

可以对$-\mathbf{H}$使用Sylvester定理以确定$\mathbf{H}$的负定性。

仅仅用所有顺序主子式非负(≥0)代替为正(>0)，不能判定一个矩阵是不是半正定的。必须所有的主子式都是非负的，才能得出矩阵是半正定的。要使用这一判定条件，必须对所有的$p=1, 2, \cdots, n$,计算所有可能的$\binom{n}{p}^2$个p阶主子式，这是不大可能做到的。对于实对称矩阵，如果顺序主子式都是正的，那么所有的主子式也都是正的。一个矩阵不是正定的、负定的、半正定的或半负定的，则是不定的。

例1-12 确定下列各矩阵的正定负定性质。

[**解**] (*a*)

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$h_{11}=2, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=6-1=5, \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}=13$$

因为所有的顺序主子式都是正的，所以$\mathbf{H}$是正定的。

$$(b) \qquad \mathbf{H}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$h_{11}=2, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-6-1=-7, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}=47$$

H不是正定的。考虑$-\mathbf{H}$：

$$-\mathbf{H}=\begin{bmatrix}-2 & -1 & -2\\ -1 & 3 & 0\\ -2 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

这时，

$$h_{11}=-2,\quad \begin{vmatrix}-2 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=-7,\quad \begin{vmatrix}-2 & -1 & -2\\ -1 & 3 & 0\\ -2 & 0 & 5\end{vmatrix}=-47$$

所以**H**是不定的。

二、非线性规划

现在将以后各章中要考虑的非线性规划问题定义如下：

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

$$\text{且使}\quad \begin{cases} g_i(\mathbf{x})=0 & i=1,\ 2,\cdots,m<n\\ h_j(\mathbf{x})\geqslant 0 & j=1,\ 2,\cdots,r\end{cases}$$

其中$\mathbf{x}=[x_1,\ x_2,\cdots,x_n]^T$，所有的函数$f$、$g_i$、$h_j$都是可微的。换句话说，我们希望从满足$m$个等式约束

$$g_i(\mathbf{x})=0\quad i=1,\ 2,\ \cdots m,<n$$

和r个不等式约束

$$h_j(\mathbf{x})\geqslant 0\quad j=1,\ 2,\ \cdots,r$$

的所有$\mathbf{x}$所成的集合中，找出一个特定的点(或者一个子集，因为问题的解可以不是唯一的。)$[x_1^*,\ x_2^*,\cdots,\ x_n^*]^T$，它使$f(\mathbf{x})$取最小值。要注意，等式约束的个数$m$必须严格地小于变数的个数$n$。如果$m\geqslant n$，称问题是**过約束**的(*overconstr a*

ined)，因为这时已经没有为了最优化而选择解的自由度。**自由度**的数目由$n-m$给出。

满足全部约束的所有可能的x值的集合，称为**可行集**。可行集的任意元素称为**可行点**。

上面定义的非线性规划问题仅处理可微函数。一类违反这一限制的问题称为**整数规划**。这类问题要求从整数点集中，而不是从实数点集中选取解，这将在第十一章中讨论。目前，求解这类问题的计算方法，比非线性规划的解法更差一些。

没有约束、或只有等式约束、或只有不等式约束等特殊情形，也称为非线性规划问题。

例1-13 对于非线性规划问题

$$\min_{x_1, x_2}(x_1-2)^2+(x_2-2)^2$$

$$\text{且使}\quad x_1+2x_2=4,\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0$$

图1-9给出了可行集。这是满足$x_1+2x_2=4$和$x_1\geqslant 0$、$x_2\geqslant 0$的$\{x_1, x_2\}$的集合。可以把这一集合F写作

$$F=\left\{(x_1, x_2)\,|\,x_1+2x_2=4,\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0\right\}$$

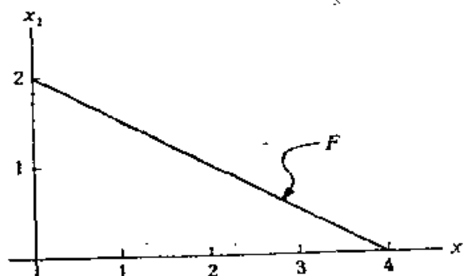


图 1-9

［**解**］ 用绘制目标函数的**等值线**(*level curves*)的方法，可以深入考察二维最优化问题。这时的等值线族是含参数的曲线族，其中的每条曲线上，目标函数 $f(x_1, x_2)$ 都是常数，该常数值 k 就是参数。亦即

$$f(x_1, x_2)=k \qquad k=k_1, k_2\cdots$$

代表一族等值线。

例1-14 例1-13的等值线画在图1-10中。

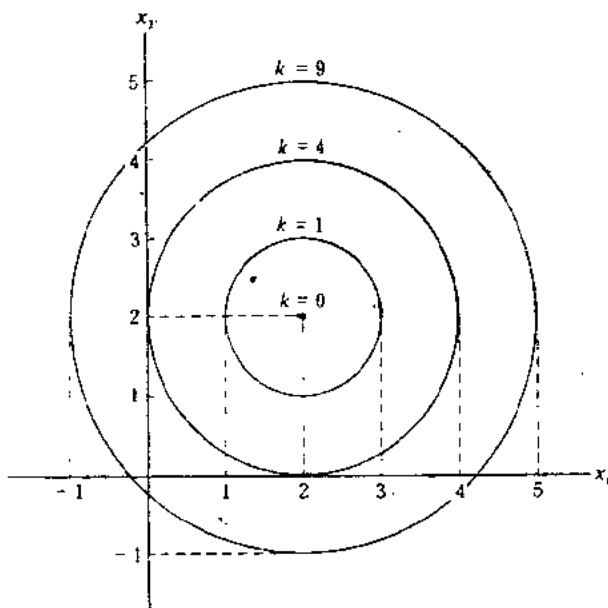


图 1-10

利用在等值线族的图上圈画可行域的方法，通常可以图解二维最优化问题。

例1-15 图1-11给出了例1-13的图解。问题的解是在可

行域内具有最小k值的等值线上的点。本题的最小值出现在集合F和等值线族的切点上，即$x_1^*=8/5$，$x_2^*=6/5$；目标函数的最小值

$$f(x_1^*,\ x_2^*)=k^*=\left(\frac{8}{5}-2\right)^2+\left(\frac{6}{5}-2\right)^2=\frac{4}{5}$$

［解］ 前边已经讨论过如何以-1乘$f(\mathbf{x})$，将任意一个求极大的问题转化为求极小的问题。因此，不失一般性，可以将非线性规划问题作为求极小问题来考虑。

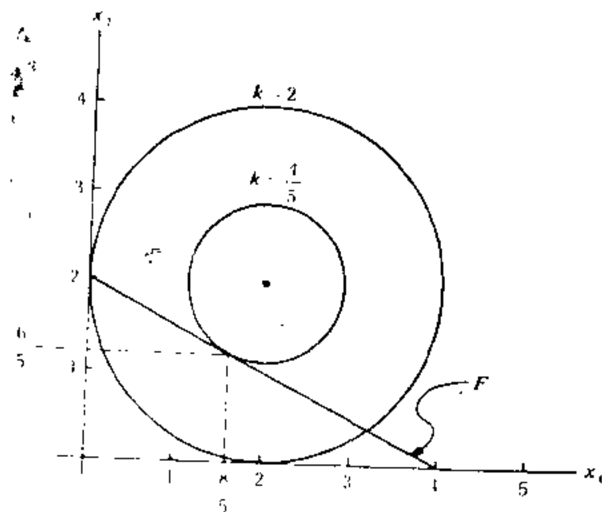


图 1-11

在不等式约束为

$$h_j(\mathbf{x})\leqslant 0 \qquad j=1,2,\cdots,r \tag{1.1}$$

的情形，乘以-1并改变不等式的方向，可以化为“标准形式”。于是，(1.1)式等价于

$$-h_j(\mathbf{x})\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,r$$

因此，研究如本段开头所给("标准形式")的问题，是有普遍意义的。

事实上，"标准形式"可以通过将每个等式约束写作两个不等试的约束来加以简化，因为只有同时满足

$$g(\mathbf{x})\geqslant 0 \quad 和 \quad g(\mathbf{x})\leqslant 0$$

的那些$\mathbf{x}$值，才能使$g(\mathbf{x})=0$。于是，m个等式

$$g_i(\mathbf{x})=0,\ i=1,2,\cdots,m$$

可以用$2m$个不等式

$$g_i(\mathbf{x})\geqslant 0,\ i=1,2,\ \cdots,m$$

$$-g_i(\mathbf{x})\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m$$

来代替。这样一来，非线性规划问题可以写作

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

$$且使\quad \left[\begin{array}{c} g_i(\mathbf{x}) \\ -g_i(\mathbf{x}) \\ h_j(\mathbf{x}) \end{array}\right]\geqslant 0 \quad \begin{array}{l} i=1,\ 2,\ \cdots,\ m<n \\ j=1,\ 2,\cdots,r \end{array}$$

但是，由于处理等式约束和不等式约束问题的方法(理论的和计算的)是不同的，所以我们限于讨论在本段开头所给出的那种形式的非线性规划问题。

例1-16 约束

$$e^{-x}-1=0$$

仅有的一个解是$x=0$。它可以通过求下列两个可行集

$$F_1=\left\{x \mid e^{-x}-1 \geqslant 0\right\}$$

$$F_2=\left\{x \mid -e^{-x}+1 \geqslant 0\right\}$$

的交集而得到、或者

$$F=F_1 \cap F_2=\left\{x \leqslant 0\right\} \cap \left\{x \geqslant 0\right\}=\left\{0\right\}$$

如图1-12所示。

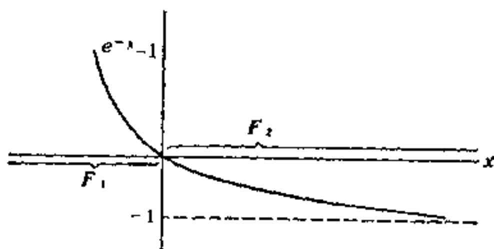


图 1-12

三、 线性规划

上一段的非线性规划问题，最重要的特殊情形是线性规划问题，表示如下：

$$\min_{x_j} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

且使
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i & i=1, 2, \cdots, m \\ x_j \geqslant 0, & j=1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

或者用向量-矩阵记号

$$\min_{x} c^T x$$

$$\text{且使}\quad \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{x}\leqslant \mathbf{b} \\ \mathbf{x}\geqslant 0 \end{cases}$$

其中 $\mathbf{c}$ 和 $\mathbf{x}$ 是 n 维向量，$\mathbf{b}$是m维向量，$\mathbf{A}$是$m\times n$矩阵。

例1-17　对于线性规划问题

$$\min_{x_1,x_2}\frac{3}{2}x_1+x_2$$

$$\text{且使}\quad \begin{cases} x_1+3x_2\leqslant 15 \\ x_1+x_2\leqslant 6 \\ 2x_1+x_2\leqslant 10 \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

图1-13给出了可行域，等值线族和图解结果。

线性规划的概述在附录中给出。

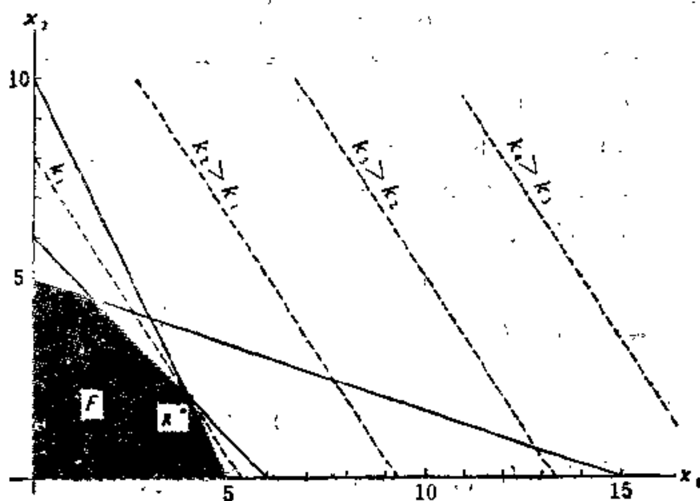


图 1-13

习题与题解

数学预备知识

1-1 用定义直接证明x^2是凸函数。

[**解**] $f(x)$是凸的，意即

$f(\lambda x_2+(1-\lambda)x_1)\leqslant\lambda f(x_2)+(1-\lambda)f(x_1)$ 所有 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ 要证$f(x)=x^2$是凸的，只要证

$[\lambda x_2+(1-\lambda)x_1]^2\leqslant\lambda x_2^2+(1-\lambda)x_1^2$ 所有 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$

展开、并项，得到

$$-\lambda(1-\lambda)x_2^2+2\lambda(1-\lambda)x_1x_2-\lambda(1-\lambda)x_1^2\leqslant 0$$

或者 $\lambda(1-\lambda)(x_1-x_2)^2\geqslant 0$

对于$0\leqslant\lambda\leqslant 1$，因为$\lambda(1-\lambda)=\lambda-\lambda^2$，所以 $0\leqslant\lambda(1-\lambda)\leqslant 1/4$非负。因此有

$$\lambda(1-\lambda)(x_1-x_2)^2\geqslant 0 \qquad 0\leqslant\lambda\leqslant 1$$

1-2 考虑二次型 $f(x_1, x_2)=x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2$；

(a) 写出它的矩阵-向量形式。

(b) 矩阵是不是奇异的？

(c) 证明$f(x_1,x_2)$是正定的。

(d) $f(x_1, x_2)$是凸的吗？

(e) 求在(2,1)点的支撑超平面方程。

[**解**] (a) $f(x_1, x_2)=[x_1\ x_2]\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$

(b) $\det\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=2\neq 0$，因而矩阵是非奇异的。

(c) $f(x_1, x_2)=(x_1+x_2)^2+2x_2^2$，对于所有的$(x_1, x_2)\neq 0$皆有$f>0$，因而$f$是正定的。

(d) f 是凸的。因为所有的正定二次型都是严格凸的，所以 f 是凸的(见题1-8)。

(e) 在z_0 切于某个凸集的支撑超平面的一般表达式是

$$z-z_0=[\nabla f(x_0)]^T(x-x_0)$$

本题中

$$x_0=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ z_0=f(x_0)=4+4+3=11$$

$$\nabla f(x_0)=\begin{bmatrix} 2x_1+2x_2 \\ 2x_1+6x_2 \end{bmatrix}_{2,1}=\begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$z=6(x_1-2)+10(x_2-1)+11$$

或 $$z=6x_1+10x_2-11$$

1-3 确定下列各式哪些是二次型：

(a) $z=x_1+2x_2^2$，　　(c) $z=x_1^2-x_2^2$

(b) $z=x_1x_2$，　　(d) $z=x_1^2+3x_1x_2+3x_2^2$

[**解**] 要使 z 是二次型，它必须能写成

$$z=\mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{x}$$

的形式。

(a) 不是二次型，因为它对 x_1 是一次的。

(b) 是二次型，$\mathbf{H}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

(c) 是二次型，$\mathbf{H}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(d) 是二次型，$\mathbf{H}=\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 \end{bmatrix}$

1-4　求下列各个函数的梯度，并指出函数和梯度的奇异点。

(a) $f(x)=\ln x$

(b) $f(x, y)=x^2-y^2-1$,

(c) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$

(d) $f(x)=\frac{\sin x}{xe^x}$

［解］　如果在某个点上函数不存在，称此点为**奇异点**。

(a) $\nabla f(x)=\frac{1}{x}$，函数及其梯度在$x=0$有奇异点。

(b) $\nabla f(x, y)=\begin{bmatrix} 2x \\ -2y \end{bmatrix}$，$f(x, y)$及$\nabla f(x, y)$都没有奇异点。

(c) $\nabla f(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

函数及其梯度在$x=0$都是不定式。用 l' Hospital 法则，如果函数$f(x)=N(x)/D(x)$，在$x=0$比值$N_x(x)/D_x(x)$存在，$x=0$就不是奇异点。

因为

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\cos x,\ \frac{\partial D}{\partial x}=1,\ 以及\frac{N_x}{D_x}(0)=\frac{\cos 0}{1}=1$$

所以$x=0$不是$f(x)$的奇异点。

类似地，对于$\nabla f(0)$，有

$$\frac{\partial N}{\partial x}=-x\sin x,\quad \frac{\partial D}{\partial x}=2x,\ \frac{N_{xx}}{D_{xx}}(0)=\frac{-\sin 0}{2}=0$$

因而在$x=0$，$\nabla f(x)$也不是奇异的。

(d) $\nabla f(x)=\frac{\cos x-\sin x}{xe^x}-\frac{\sin x}{x^2e^x}$

$f(x)$，$\nabla f(x)$ 都没有奇异点，可用l'Hospital 法则检验$x=0$点。

1-5 确定二次型$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$是不是正定的，其中$\mathbf{A}$为

(a) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ (b) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

(c) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 6\end{pmatrix}$

[解] 首先检验主子式，并使用Sylvester定理。

(a) $|1|>0$, $\begin{vmatrix}1 & 4\\ 0 & 3\end{vmatrix}=3>0$，所以$\mathbf{A}$是正定的。

(b) $|1|>0$, $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0$, $|A|=0$，所有$\mathbf{A}$不是正定的。

(c) $|1|>0$, $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 6\end{vmatrix}=2$，所以$\mathbf{A}$是正定的。

1-6 证明函数 $1/x$当$x>0$时是严格凸的，而当$x<0$时严格凹的。

[证] 必须证明

$f(\lambda x_2+(1-\lambda)x_1)<\lambda f(x_2)+(1-\lambda)f(x_1)$

当x_1，$x_2>0$，$x_1\neq x_2$，$0<\lambda<1$

以及$f(\lambda x_2+(1-\lambda)x_1)>\lambda f(x_2)+(1-\lambda)f(x_1)$

当x_1，$x_2<0$，$x_1\neq x_2$，$0<\lambda<1$

对于$f(x)=1/x$，有

$$\lambda f(x_2)+(1-\lambda)f(x_1)-f(\lambda x_2+(1-\lambda)x_1)$$
$$=\frac{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2}{x_1x_2}-\frac{1}{\lambda x_2+(1-\lambda)x_1}$$
$$=\frac{\lambda(1-\lambda)(x_1-x_2)^2}{x_1x_2[\lambda x_2+(1-\lambda)x_1]}$$

因为$0<\lambda<1$，所以$\lambda(1-\lambda)>0$；又因为$x_1\neq x_2$，所以$(x_1-x_2)^2>0$。另外，对于x_1，$x_2>0$或x_1，$x_2<0$，有$x_1x_2>0$，并且

$$\lambda x_2+(1-\lambda)x_1>0 \quad 当x_1，x_2>0$$

$$\lambda x_2+(1-\lambda)x_1<0 \quad 当x_1，x_2<0$$

因此，
$$\frac{\lambda(1-\lambda)(x_1-x_2)^2}{x_1x_2[\lambda x_2+(1-\lambda)x_1]}>0 \quad 对任意的x_1,x_2>0$$

$$\frac{\lambda(1-\lambda)(x_1-x_2)^2}{x_1x_2[\lambda x_2+(1-\lambda)x_2]}<0 \quad 对任意的x_1,x_2<0$$

亦即x当$\vee 0$时$1/x$是严格凸的，当$x<0$时是严格凹的。

1-7 求下列函数的梯度向量和Hesse矩阵：

(*a*) $f(\mathbf{x})=3x_1x_2^2+4e^{x_1x_2}$，(*c*) $f(\mathbf{x})=x_1^2+x_2^2+x_3^2$，

(*b*) $f(\mathbf{x})=x_1^{x_2}+\ln x_1x_2$，(*d*) $f(\mathbf{x})=\ln(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$

［解］(*a*) $\nabla f(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}3x_2^2+4x_2e^{x_1x_2}\\6x_1x_2+4x_1e^{x_1x_2}\end{bmatrix}$

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix} 4x_2^2e^{x_1x_2} & 6x_2+4x_1x_2e^{x_1x_2}+4e^{x_1x_2} \\ 6x_2+4e^{x_1x_2}(1+x_1x_2) & 6x_1+4x_1^2e^{x_1x_2} \end{bmatrix}$$

(b) $$\nabla f(\mathbf{x})=\begin{bmatrix} x_2x_1{}^{x_2-1}+1/x_1 \\ x_1{}^{x_2}\ln x_1+1/x_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix} x_2(x_2-1)x_1{}^{x_2-2}-1/x_1^2 & x_2x_1{}^{x_2-1}\ln x_1+x_1{}^{x_2-1} \\ x_2x_1{}^{x_2-1}\ln x_1+x_1{}^{x_2-1} & x_1x_2(\ln x_1)^2-1/x_2^2 \end{bmatrix}$$

(c) $$\nabla f(\mathbf{x})=\begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{bmatrix},\quad \mathbf{H}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(d) $$\nabla f(\mathbf{x})=\begin{bmatrix} \dfrac{2x_1+x_2}{x_1^2+x_1x_2+x_2^2} \\ \dfrac{x_1+2x_2}{x_1^2+x_1x_2+x_2^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}=\frac{1}{(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)^2}\begin{bmatrix} -2x_1^2+x_2^2-2x_1x_2 & -x_1^2-x_2^2-4x_1x_2 \\ -x_1^2-x_2^2-4x_1x_2 & x_1^2-2x_2^2-2x_1x_2 \end{bmatrix}$$

1-8 证明$f(\mathbf{x})=\mathbf{q}^T\mathbf{x}+\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}$是严格凸的，当且仅当$\mathbf{Q}$是正定的。

［证］ 根据定义

$$f(\lambda\mathbf{x}_2+(1-\lambda)\mathbf{x}_1)<\lambda f(\mathbf{x}_2)+(1-\lambda)f(\mathbf{x}_1)$$

$$0<\lambda<1,\ x_1\neq x_2$$

因而 $\lambda f(\mathbf{x}_2)+(1-\lambda)f(\mathbf{x}_1)-f(\lambda\mathbf{x}_2+(1-\lambda)\mathbf{x}_1)>0$

将 $f(\mathbf{x})=\mathbf{q}^T\mathbf{x}+\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}$代入上式，有

$$\lambda\left[q^Tx_2+\frac{1}{2}x_2^TQx_2\right]+(1-\lambda)\left[q^Tx_1+\frac{1}{2}x_1^TQx_1\right]$$

$$-q^T\left[\lambda x_2+(1-\lambda)x_1\right]-\frac{1}{2}\left[\lambda x_2+(1-\lambda)x_1\right]^T$$

$$Q[\lambda x_2+(1-\lambda)x_1]>0$$

由此得

$$\lambda(1-\lambda)[(x_1-x_2)^TQ(x_1-x_2)]>0$$

现在，如果$x_1-x_2=y\neq0$，且$0<\lambda<1$，那么

$$\lambda(1-\lambda)y^TQy>0$$

当且仅当Q是正定的。

1-9 证明凸函数的和是凸函数。

［证］ 设函数$f_i(x)$ $i=1,2,\cdots,m$在某个凸集$X\subset E^n$上是凸的。定义

$$F(x)=\sum_{i=1}^{m}f_i(x)$$

因为$f_i(x)$，$i=1,2,\cdots,m$是凸的，所以

$$f_i(\lambda x_2+(1-\lambda)x_1)\leqslant\lambda f_i(x_2)+(1-\lambda)f_i(x_1)$$

其中$i=1,2,\cdots,m$，$0\leqslant\lambda\leqslant1$，$x_1$，$x_2\in X$

对所有的i求和，得

$$\sum_{i=1}^{m}f_i(\lambda x_2+(1-\lambda)x_1)\leqslant\sum_{i=1}^{m}[\lambda f_i(x_2)+(1-\lambda)f(x_1)]$$

也就是

$$F(\lambda x_2+(1-\lambda)x_1)\leqslant\lambda F(x_2)+(1-\lambda)F(x_1)$$

因此$F(x)$是凸函数。当然，凹函数的和还是凹函数。

1-10 函数$f(x_1, x_2)=x_1x_2$在E^2是凸的吗？在$X=\{x|x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0\}$是不是凸的？

［**解**］ 象下面的反例所表明的，$f(x_1, x_2)$在E^2不是凸的。要$f(x)$是凸的，要对所有$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\in E^2$，所有的$0\leqslant\lambda\leqslant 1$①，有

$$f(\lambda\mathbf{x}_2+(1-\lambda)\mathbf{x}_1)\leqslant\lambda f(\mathbf{x}_2)+(1-\lambda)f(\mathbf{x}_1)$$

设 $\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ $\qquad$ $\mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}$

则 $f(\mathbf{x}_1)=1(-1)=-1$，$f(\mathbf{x}_2)=(-2)2=-4$

$$\lambda\mathbf{x}_2+(1-\lambda)\mathbf{x}_1=\lambda\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}+(1-\lambda)\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}-3\lambda+1\\3\lambda-1\end{bmatrix}$$

因而$f[(-3\lambda+1), (3\lambda-1)]=(-3\lambda+1)(3\lambda-1)=-9\lambda^2+6\lambda-1$

$$\lambda f(\mathbf{x}_2)+(1-\lambda)f(\mathbf{x}_1)=\lambda(-4)+(1-\lambda)(-1)=-3\lambda-1$$

问题在于$-9\lambda^2+6\lambda-1\leqslant-3\lambda-1$是否对所有$0\leqslant\lambda\leqslant 1$成立？令$\lambda=1/2$ 可以看出这一不等式不成立。因此x_1x_2在E^2不是凸的。

现在考虑X中的二点，比如说

$$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$$

则 $f(\mathbf{x}_1)=(2)(2)=4$，$f(\mathbf{x}_2)=(4)(1)=4$，和

---

①全书都用x_1x_2（斜体）表示x的分量，而$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$（正黑体）表示二不同向量（有分量$\mathbf{x}_{11}\mathbf{x}_{12}$等）。

$$\lambda x_2+(1-\lambda)x_1=\lambda\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}+(1-\lambda)\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\lambda+2\\-\lambda+2\end{bmatrix}$$

因而 $f(2\lambda+2,\ -\lambda+2)=(2\lambda+2)(-\lambda+2)=-2\lambda^2+2\lambda+4$

$$\lambda f(x_2)+(1-\lambda)f(x_1)=\lambda(4)+(1-\lambda)4=4$$

问题是$-2\lambda^2+2\lambda+4\leqslant 4$是否对所有$0\leqslant\lambda\leqslant 1$成立？令$\lambda=1/2$，可以看到不等式不成立。因此，$x_1x_2$即使在$X$也不是凸的。然而我们注意到，$x_1x_2$在$X$沿着过原点的任意直线都是凸的。

令$x_2=\alpha x_1$，$0\leqslant\alpha<\infty$；则$f(x)=\alpha x_1^2$，对于所有的$0\leqslant\alpha<\infty$，这都是凸函数。同时，沿平行于坐标轴的任一直线，$f(x)$是线性的，因而是凸的；例如，若$x_2=4$，则$f(x)=x_1x_2=4x_1$。

1-11　将下列函数写成$y=x^THx+q^Tx$的形式。

(a) $y=x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3+3x_2^2+2x_2x_3+5x_3^2+4x_1-2x_2+3x_3$

(b) $y=5x_1^2+12x_1x_2-16x_1x_3+10x_2^2-26x_2x_3+17x_3^2-2x_1-4x_2-6x_3$

(c) $y=x_1^2-4x_1x_2+6x_1x_3+5x_2^2-10x_2x_3+8x_3^2$

［解］

(a) $H=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&3&1\\2&1&5\end{bmatrix}\qquad q=\begin{bmatrix}4\\-2\\3\end{bmatrix}$

(b) $H=\begin{bmatrix}5&6&-8\\6&10&-13\\-8&-13&7\end{bmatrix}\qquad q=\begin{bmatrix}-2\\-4\\-6\end{bmatrix}$

$$(c)\quad \mathbf{H}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ -2 & 5 & -5\\ 3 & -5 & 8\end{bmatrix}\quad \mathbf{q}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

1-12 确定下列二次型的正定负定性质。

［解］ $y=x_1^2-4x_1x_2+6x_1x_3+5x_2^2-10x_2x_3+8x_3^2$
或者$y=\mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{x}$，其中

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ -2 & 5 & -5\\ 3 & -5 & 8\end{bmatrix}$$

顺序主子式是

$$|1|=1,\quad \begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 5\end{vmatrix}=5-4=1,\quad |\mathbf{H}|=-2$$

因此，由Sylvester定理，H不是正定的。类似地，对于$-\mathbf{H}$，$|-1|=-1$；因而H也不是负定的。于是，H只可能是半正定、半负定或不定。用指出两个分别使y为正值和负值的点的办法，我们看到H的确是不定的。

令$x_2=0$；则$y=x_1^2+6x_1x_3+8x_3^2=(x_1+4x_3)(x_1+2x_3)$

如果$x_1=3$，$x_3=-1$，则$y=(3-4)(3-2)=-1<0$

如果$x_1=0$，$x_3=1$，则$y=4(2)=8>0$

非线性规划

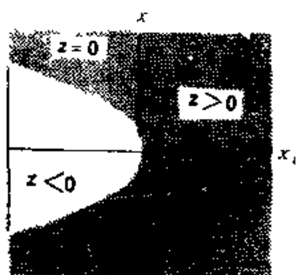
1-13 对于习题1-3中的各函数，画出在E^2的等值线族，并指出z为正值和负值的区域。

(a) $z=x_1+2x_2^2$，当$z=0$时，$x_1=-2x_2^2$，见图1-14(a)。

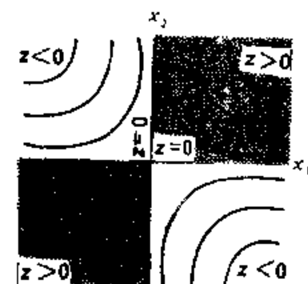
(b) $z=x_1x_2$，当$z=0$时，或者有$x_1=0$，或者有$x_2=0$。见图1-14(b)。

(c) $z=x_1^2-x_2^2$，当$z=0$时，$x_1=\pm x_2$，见图1-14(c)。

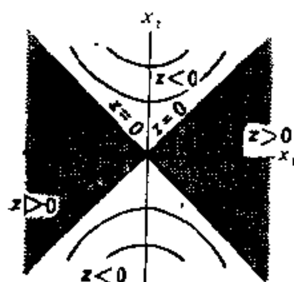
(d) $z=x_1^2+3x_1x_2+3x_2^2=\left(x_1+\frac{3}{2}x_2\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2$，当$z=0$时，有$x_1=-\frac{3}{2}x_2=0$，见图1-14(d)。



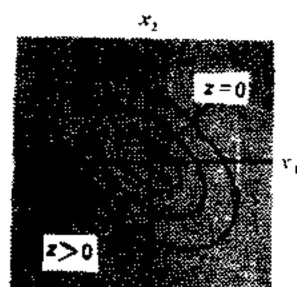
(a)



(b)



(c)



(d)

图 1-14

1-14 对于下列每一组约束，作出表示可行点集合的图形。这些集合是凸的吗？假设$x_1\geqslant0$，$x_2\geqslant0$。

(a) $x_1^2+(x_2-1)^2-1\leqslant0$

$(x_1-1)^2+x_2^2-1\leqslant0$

(*b*)　$x_1^2+(x_2-1)^2-1\leqslant 0$

$$x_1^2+x_2^2-1\leqslant 0$$

(*c*)　$x_1^2+x_2^2-1\leqslant 0$

$$x_1+x_2-\frac{1}{2}\leqslant 0$$

[**解**]　(*a*)F是严格凸的，所以是凸的。见图1-15(*a*)。

(*b*)　F是凸的但不是严格凸的。见图1-15(*b*)。

(*c*) F是凸的但不是严格凸的。见图1-15(*c*)。

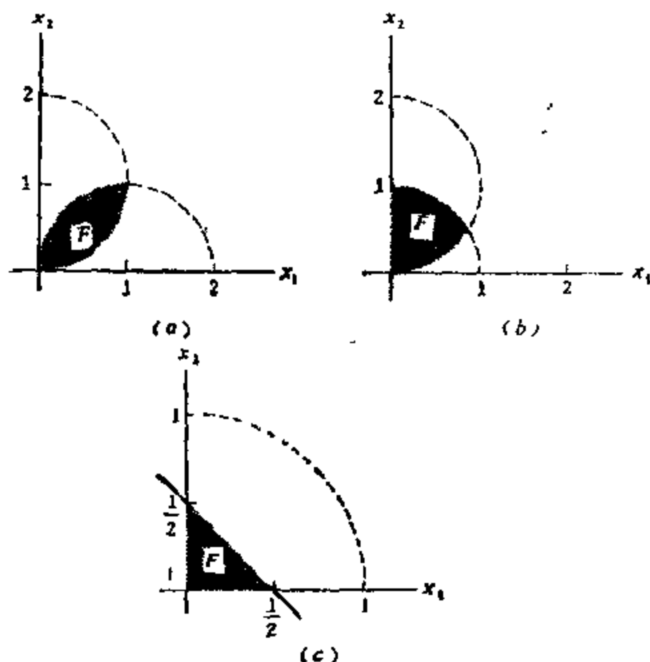


图 1-15

1-15　一个制造过程，在给定的时间周期内以成本$f_i(x_i)$生产x_i件产品。在每个周期内需要d_i件产品，而库

存y_i件的费用为$c_i(y_i)$。在每一时间周期中产量不能超过X件，库存不超过Y件。如果初始库存为0，试把问题叙述成使n个周期的总成本为最小的非线性规划问题。

[解] 总成本由下式给出

$$F(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_{i=1}^{n}[f_i(x_i)+c_i(y_i)]$$

任一周期的库存量

$y_i=y_{i-1}+x_i-d_i$，其中 $y_0=0$，$i=1, 2, \cdots, n$

非线性规划问题是

$$\min_{x_i,y_i}\sum_{i=1}^{n}[f_i(x_i)+c_i(y_i)]$$

$$\text{且使}\begin{cases}y_i=y_{i-1}+x_i-d_i\\ y_0=0, \ x_i\leqslant X, \ y_i\leqslant Y\end{cases}$$

注意变数x_i容易消去，问题成为

$$\min_{y_i}\sum_{i=1}^{n}[f_i(y_i-y_{i-1}+d_i)+c_i(y_i)]$$

且使$y_i-y_{i-1}+d_i\leqslant X$，$y_i\leqslant Y$，$y_i\geqslant 0$，$y_0=0$，$i=1, 2,\cdots,n$

线性规划

1-16 在什么条件下第1-15题是一个线性规划问题？

[解] 如果$f_i(x_i)=a_ix_i$，$c_i(y_i)=b_iy_i$且$y_i\geqslant 0$，则有线性规划问题

$$\min_{y_i}\sum_{i=1}^{n}[a_i(y_i-y_{i-1}+d_i)+b_iy_i]$$

且使 $y_i - y_{i-1} + d_i \leqslant X$, $y_i \leqslant Y$, $y_i \geqslant 0$, $y_0 = 0$

$i = 1, 2, \cdots, n$

1-17 一家大面包店，有m座加工厂遍及全国。每天的面包产量，第i座工厂限定不超过s_i个面包，$i=1,2,\cdots,m$。每天该面包店必须供应它的n个大配售店D_j个面包才能满足需求，$j=1,2,\cdots,n$。线性规划问题是：确定由哪些工厂供应哪些配售店，以便使总的运输费用为最少。

［解］ 设x_{ij}是从工厂i运往配售店j的面包个数，c_{ij}是每个面包的运费。则问题可以表述如下：

$$\min_{x_{ij}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{且使} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant s_i, \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant D_j \quad x_{ij} \geqslant 0$$

$$i = 1, 2, \cdots, m \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

补 充 题

1-18 考虑二次型$f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2$

(*a*) 改写成矩阵-向量记号的形式。

(*b*) 写出Hesse矩阵。

(*c*) 证明$f(\mathbf{x})$是正定的。

(*d*) $f(\mathbf{x})$是凸的吗？为什么？

(*e*) 求在点(2, 2)的切超平面的方程。

1-19 以E^2画出等值线并给出z取正值和负值的区域。

(*a*) $z = x_1^2 + 2x_2^2$， (*c*) $z = x_1/x_2$

(*b*) $z = x_1^2 - x_2^2 + 4$， (*d*) $z = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1$

1-20　证明e^{-x}是严格凸的。

1-21　题1-19　中哪几个函数是二次型?

1-22　求梯度：(a) $z=3x_1/x_2+4e^{x_1/x_2}$

(b) $z=(x_1x_2)^{-1}$

1-23　求题1-22中各个函数的Hesse矩阵。

1-24　确定下列各个二次型$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$的正定负定性质。

(a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$　(b) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

1-25　将下列各函数写成$y=\mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{x}+\mathbf{q}^T\mathbf{x}$的形式：

(a)　$y=2x_1^2+x_1x_2+9x_1x_3+3x_2^2+x_2x_3+2x_2$

(b)　$y=x_1^2-6x_1x_3+x_3^2+9x_3$

1-26　图解

$$\min_{x_1, x_2}(x_1-6)^2+(x_2-2)^2$$

且使　$0.5x_1+x_2\leqslant 4$，$3x_1+x_2\leqslant 15$，$x_1+x_2\geqslant 1$，$x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$

1-27　图解

$$\max_{x_1, x_2} 2x_1+3x_2+4x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$$

且使　$x_1-x_2\geqslant 0$，$x_1+x_2\leqslant 4$，$x_1\leqslant 3$

1-28　图解

$$\max_{x_1, x_2} x_1x_2$$

且使$3x_1+2x_2\leqslant 9$，$0.5x_1+x_2\leqslant 4$

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0$$

1-29　图解

$$\max_{x_1, x_2}\ 4x_1+3x_2$$

且使$2x_1-x_2\geqslant 0$，$0.5x_1-x_2\leqslant 0$，$x_1+x_2\leqslant 5$

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0$$

1-30　限定x_1、x_2是整数，求解题1-29。

第二章　古典最优化

一、　极大、极小和鞍点

这一章讨论无约束静态最优化问题。问题的提法如下：

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

说它是无约束的，是因为对 $\mathbf{x}$ 的可取值未加任何限制。其他各方面的问题却都必须予以探讨。例如 $f(\mathbf{x})$在什么条件下具有极小值？是否唯一？是不是相对极小？等等，下面我们从定义开始回答这些问题。

绝对或全局极小值：函数 $f(\mathbf{x})$定义在 E^n 中闭集 X 上，若对于每一点 $\mathbf{x}\in X$，都有$f(\mathbf{x})\geqslant f(\mathbf{x}^*)$，则称$f(\mathbf{x})$在点 $\mathbf{x}^*$ 取得它在整个 X 上的绝对或全局极小值。

强相对或强局部极小值：设 $f(\mathbf{x})$定义在 E^n 中 $\mathbf{x}^*$ 点其 δ 邻域中，如果存在一个 ε，$0<\varepsilon<\delta$，使得对于满足 $0<\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|<\varepsilon$ 的一切 $\mathbf{x}$ 值，都有 $f(\mathbf{x})>f(\mathbf{x}^*)$，则称函数 $f(\mathbf{x})$在 $\mathbf{x}^*$有强相对或强局部极小值。

在 $\mathbf{x}^*$ 点上有全局极小值，意味着目标函数在该点取得它在整个集合 X 上最小的函数值 $f(\mathbf{x}^*)$。对于大多数实际问题(除去极小是在 $\|\mathbf{x}^*\|=\infty$的情况)，集合 X 可以是整个空间 E^n。另一方面，强局部极小仅仅保证 $f(\mathbf{x})$的值相对于它附近的其它点，具体说就是相对于 $\mathbf{x}^*$ 的一个 ε 邻域中的点为极小值(见图2-1)。因而一个函数可以有许多个局部极小，

各点有各自的目标函数值，比如 $f(X_i^0), i=1,\cdots,p$。比较这些函数值，从中选出一个符合

$$f(X^*)\leqslant f(X_i^0),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ p$$

其中

$$X^*\in\left\{X_i^0\ \Big|_{i=1,2,\cdots,p}\right\}$$

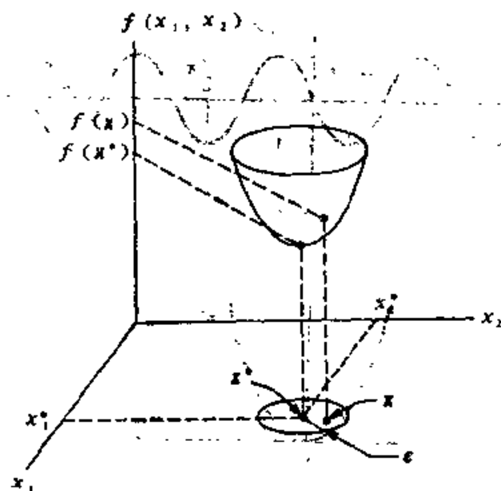


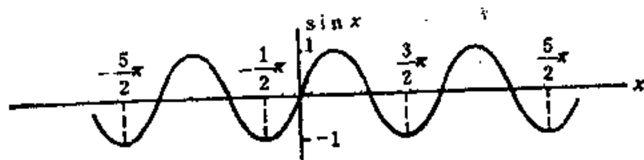
图 2-1

全局极小值总是能够选出的。每一个全局极小也是局部极小，但反之不一定成立。

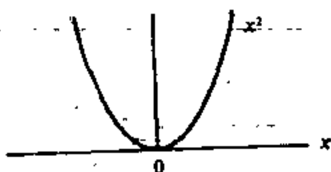
一个全局极小值 $f(X^*)$，如果 $f(X)>f(X^*)$，则该极小值是唯一的。并且称为正常的全局极小值。在局部极小的情况下，如果 $f(X)\geqslant f(X^*)$则局部极小不唯一，称为弱局部极小值。关于求极大的问题，将前述定义中的不等式反向，即可得到类似的定义。

例2-1 (*a*) 看图 2-2(*a*)，在点 $x_k^*=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$，其中 $k=\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\cdots$，$\sin x$ 有无穷多个强局部极小，因为 $\sin x_k^*=-1$，所以这些 x_k^*(对所有的 k)也是全局极小，但没有正常的全局极小值。

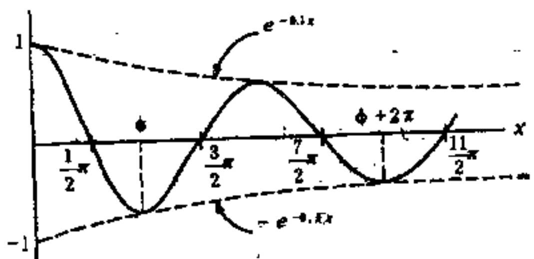
(*b*) 参看图 2-2(*b*)，函数 x^2 在 $x^*=0$ 有强局部极小值，这是正常的全局极小值。



(*a*)



(*b*)



(*c*)

图 2-2

(c) 参看图 2-2(c)，当$x\geqslant 0$，$e^{0.1x}\cos x$在$x^*=\phi+2k\pi$，$k=0, 1, 2, \cdots$有无限多个强局部极小，其中$\phi=\mathrm{arctg}(-0.1)\approx 174.3^\circ$。因为$e^{-0.1x_0^*}\cos x_0^*<e^{0.1x_k^*}\cos x_k^*$，$k=1, 2, \cdots$，所以在$x_0^*$有正常的全局极小值。

例2-2 (a) 如果 **A** 是正定的，则 $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ 在 $\mathbf{x}^*=\mathbf{0}$ 有正常的全局极小值，这可以从正定性的定义推出。

(b) 如果 **A** 是半正定的，则 $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ 有全局极小值，但不是正常的。这个全局极小值出现在 $\mathbf{x}^*$ 点，在该点上 $(\mathbf{x}^*)^T\mathbf{A}\mathbf{x}^*=0$，根据半正定性定义，除 $\mathbf{x}^*=\mathbf{0}$ 以外，还存在着某些$\mathbf{x}^*\neq\mathbf{0}$，使函数取全局极小值。

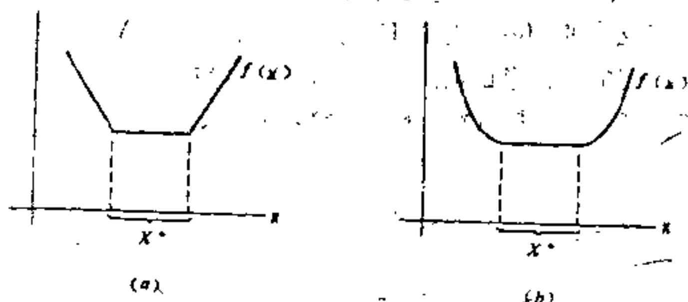


图 2-3

例2-3 (a) 参看图 2-3(a)，不可微函数在区域 X^* 上取弱局部极小值。

(b) 参看图 2-3(b)，可微函数在区域 X^* 上取弱局部极小值。

显然，对于有实际意义的最优化问题，通常总是想求得全局最优解。但是，如果目标函数有不止一个局部极小值，这就要求找出所有的局部极小，然后计算在每个局部极小点的目标函数值，并选出全局极小。而且，假如未能求出全局的

局部极小，就得不出全局极小值而前功尽弃。为避免出现这种困难情形，一种适当的办法是确保目标函数是凸的或严格凸的。因为对于这样的函数，局部极小值也是全局极小值。如果函数是严格凸的，那么全局极小也是唯一的，也就是说它是正常的全局极小。因此，对于凸函数，只要找到局部极小值，问题就解决了。我们将会看到，大多数的理论和计算都是为了求局部极小。因此，为了计算上的简单起见，我们经常是把注意力限定于凸目标函数。然而，对于很多有实际意义的问题，这一点并不总是能够办到的。

例2-4 设 $f(\mathrm{x})$是定义在 $X\subset E^n$ 上的二次可微的凸函数，那么它的 Hesse 矩阵 $\mathrm{H}(\mathrm{x})$对于所有的 $\mathrm{x}\in X$是都正定或半正定的。由半正定性的定义推出 $f(\mathrm{x})$在点 x^* 有全局极小值，其中 x^* 满足$(\mathrm{x}^*)^T\mathrm{H}(\mathrm{x}^*)\mathrm{x}^*\geqslant 0$。

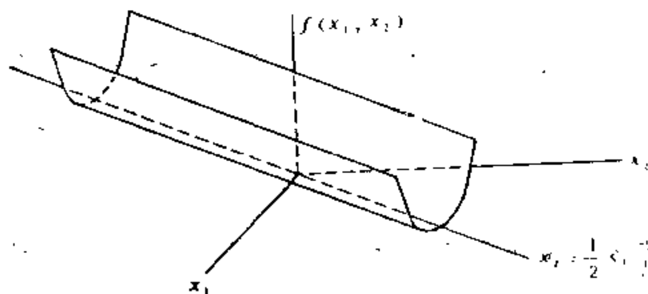


图 2-4

例2-5 参看图2-4求解

$$\min_{x_1, x_2}(x_1-2x_2)^2$$

除了沿直线 $x_2=x_1/2$ 外，该函数皆取正值，因此在集合X^*上函数取全局极小值，其中

$$X^*=\left\{x_1, x_2 \middle| x_1-2x_2=0\right\}$$

例2-6 设 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}+b\mathbf{x}$，其中

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$f(\mathbf{x})$的 Hesse 矩阵是 $\mathbf{A}$，因为它不依赖于 $\mathbf{x}$，并且它的顺序主子式都是正的

$$A_1=6 \qquad A_2=\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=11 \qquad A_3=\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}=42$$

由 Sylvester 定理可知，对于所有的 $\mathbf{x}$，$\mathbf{A}$ 都是正定的。于是由定理 1-3 得出 $f(\mathbf{x})$是严格凸的，并有正常的全局极小值。

凸函数和凹函数，常称做单峰函数，因为它们只有一个最优点(或区域)。具有多个极大或极小，或兼有极大和极小的函数称为多峰函数。

函数 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$，如果存在 $\varepsilon>0$，使得对于满足$\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|<\varepsilon$的所有 $\mathbf{x}$ 及满足$\|\mathbf{y}-\mathbf{y}_0\|<\varepsilon$ 的所有 $\mathbf{y}$ 均有

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0)\leqslant f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)\leqslant f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})$$

则称 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$在$(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$有鞍点。于是，如果 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$在$(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$有鞍点，那么 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$作为变量 $\mathbf{x}$ 的函数以该点为极大，而作为变量 $\mathbf{y}$ 以该点为极小。对于二个变量的二次可微函数 $f(x, y)$，下面的判别式(△)可用以识别鞍点、极大和极小。用必要条件

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)=0$$

定出(x_0, y_0)点，并计算

$$\Delta=\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2\right\}\Bigg|_{(x_0, y_0)}$$

那么：

(1) 如果$\Delta>0$，并且

$$\left.\frac{\partial f^2}{\partial x^2}\right|_{x_0, y_0}<0 \qquad \left[\text{或}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{x_0, y_0}<0\right]$$

则(x_0, y_0)是局部极大。

(2) 如果$\Delta>0$，并且

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_0, y_0}>0 \qquad \left[\text{或}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{x_0, y_0}>0\right]$$

则(x_0, y_0)是局部极小。

(3) 如果$\Delta<0$，则(x_0, y_0)是鞍点。

(4) 如果$\Delta=0$，则这一检验得不出结果。

可惜，类似识别鞍点的简单条件在高维空间是不适用的，这个问题以及当$\Delta=0$时该怎么办，将在下一段讨论。

例2-7 考虑函数 $f(x, y)=x^2-y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=-2y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=0$$

$$\Delta=2(-2)-0=-4<0$$

因此 $x_0=0$，$y_0=0$ 是 $f(x, y)$的鞍点，从图 2-5 的等值曲

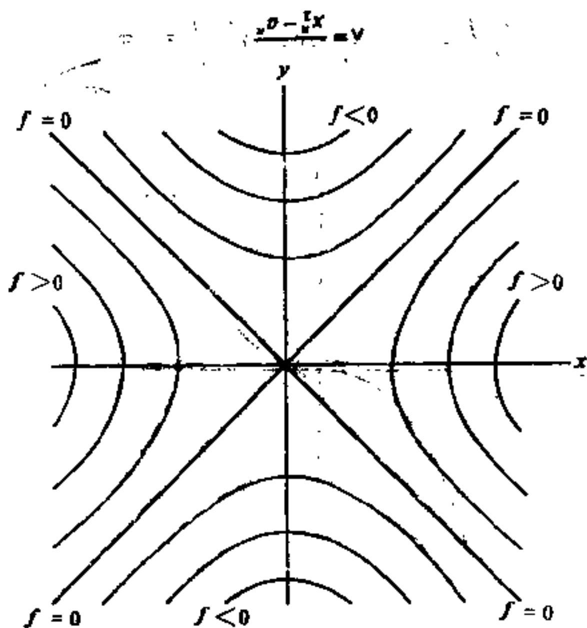


图2-5

线族可以清楚地看出这一结论。

在一元函数的情况下，与鞍点类似的概念是拐点。如果

$$\frac{df}{dx}(x_0)=0$$

即第一个不为零的高阶导数是奇数阶的，那么这个 x_0 就是拐点。

例2-8 参看图2-6，函数 $f(x)=x^3$，于是由

$$\frac{df}{dx}=3x^2=0$$

得到 $x_0=0$，但是

$$\frac{d^2f}{dx^2}=6x\bigg|_{x=0}=0, \text{及}\frac{d^3f}{dx^3}=6\neq 0$$

因此 $x_0=0$ 是拐点。

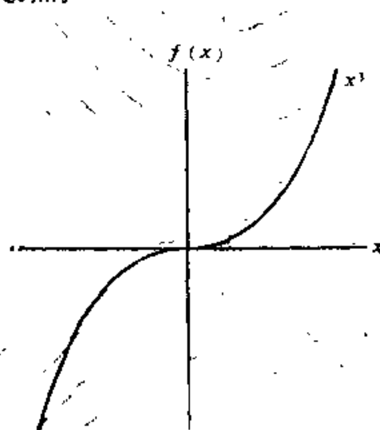


图 2-6

二、无约束问题

现在推导无约束问题

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

具有强局部极小的必要条件与充分条件。我们假设 $f(\mathbf{x})$ 是二次可微的，为书写方便起见，这里的推导只对二维自变量 $\mathbf{x}=[x_1, x_2]^T$ 的情形进行，而所得结果容易推广到高维的情况。

设 (x_0, y_0) 是强局部极小的候选点，把 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 展成Taylor 级数，只保留一阶和二阶项，令 $x=x_0+h$，$y=y_0+k$，则

$$f(x_0+h, y_0+k)=f(x_0, y_0)+hf_x(x_0, y_0)+kf_y(x_0, y_0)+\frac{1}{2}h^2f_{xx}(x_0, y_0)+hkf_{xy}(x_0, y_0)+\frac{1}{2}k^2f_{yy}(x_0, y_0)+O(h^3, k^3)$$

其中

$$f_x=\frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_y=\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$f_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad f_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

使用矩阵记号，则可以写成

$$f(x_0+h, y_0+k)=f(x_0, y_0)+hf_x(x_0, y_0)+kf_y(x_0, y_0)+\frac{1}{2}[h, k]\mathrm{H}(x_0, y_0)\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}+O(h^3, k^3)$$

其中：

$$\mathrm{H}(x_0, y_0)=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}_{x_0, y_0}$$

是点(x_0, y_0)的 Hesse 矩阵。而表达式
$\frac{1}{2}[h, k]\mathrm{H}(x_0, y_0)\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$则是二次型。

根据定义，如果对于满足 $0<\sqrt{h^2+k^2}<\varepsilon$ 的所有 h 和 k，都有

$$f(x_0+h, y_0+k)>f(x_0, y_0)$$

则在(x_0, y_0)处存在强局部极小。

引用 Taylor 级数，上式变成：

$$hf_x(x_0,y_0)+kf_y(x_0,y_0)$$
$$+\frac{1}{2}[h,k]\mathbf{H}(x_0,y_0)\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix}+O(h^3,k^3)>0$$

现在要确定的是 $f(x,y)$ 具备什么条件，才能使上述不等式成立。对所有满足 $0<\|h,k\|<\varepsilon$ 的 h，k，包括它们的正值和负值，给出以 (x_0,y_0) 为心的圆区域，由于 h 和 k 可以取正号或负号，因此不能保证上式的前二项是正的。我们所能做的最多是使

$$f_x(x_0,y_0)=0 \quad ,f_y(x_0,y_0)=0$$

这是上式不等式成立的必要条件。

现在通过适当地缩小 ε，可以缩小以 (x_0,y_0) 为心的圆区域，直到三次项和高次项比二次项的值要小。余下只要

$$\frac{1}{2}[h,\ k]\mathbf{H}(x_0,y_0)\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix}>0$$

这正是正定二次型的定义。因此，如果 $f_x(x_0,\ y_0)=0$，$f_y(x_0,\ y_0)=0$，且 $\mathbf{H}(x_0,\ y_0)$ 是正定的，那么 $f(x,\ y)$ 在 $(x_0,\ y_0)$ 点具有强局部极小值，这是充分条件。

在 $\mathbf{H}(x_0,\ y_0)$ 为零的情况下，假如第一个非零项是 h 和 k 的偶数次项，也就是假如 n 是偶数，且

$$\frac{1}{n!}\sum_{j_1=1}^{2}\cdots\cdots\sum_{j_n=1}^{2}\frac{\partial^n f}{\partial x_{j_1}\cdots\cdots\partial x_{j_n}}(x_0,y_0)\Delta x_{j_1}\Delta x_{j_2}$$
$$\cdots\cdots\Delta x_{y_n}>0$$

则 $f(x,\ y)$ 仍然在 $(x_0,\ y_0)$ 有极小值。如果第一个非零项

是奇数次的，那么(x_0, y_0)是$f(x, y)$的鞍点。

对于n个变量的函数$f(x)$，极小的必要条件推广为

$$f_{x_1}(\mathbf{x}_0)=f_{x_2}(\mathbf{x}_0)=\cdots\cdots=f_{x_n}(\mathbf{x}_0)=0$$

至于强相对极小的充分条件，除上式外还要再加上Hesse矩阵$\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$是正定的这一条件。

对于n个变量的函数$f(\mathbf{x})$，有强相对极大的必要条件是

$$f_{x_1}(\mathbf{x}_0)=f_{x_2}(\mathbf{x}_0)=\cdots\cdots=f_{x_n}(\mathbf{x}_0)=0$$

这和极小的必要条件是相同的，不过极大的充分条件是除上式外，还要使$\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$是负定的。

为方便起见，这些必要条件常写作梯度向量的形式

$$\nabla f(\mathbf{x}_0)=0$$

由于这一条件对于极大和极小二者都是必要的，所以满足该式的点x_0称做驻点。

例2-9

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}^T\mathbf{x}$$

必要条件：$\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}=0$ 或 $\mathbf{x}^*=-\frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$

充分条件：$\mathbf{x}^*=-\frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{A}$ 为正定。

$\mathbf{A}$ 的正定性与保证 $\mathbf{A}$ 是非奇异的，即 $\mathbf{A}$ 的逆存在。

对于问题

$$\max_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}^T\mathbf{x}$$

有同样的结果，只是 $\mathbf{A}$ 必须是负定的，以保证 $\mathbf{x}^*$ 为极大。

例2-10 求函数 x^3-4x^2 的极值点(见图2-7)。

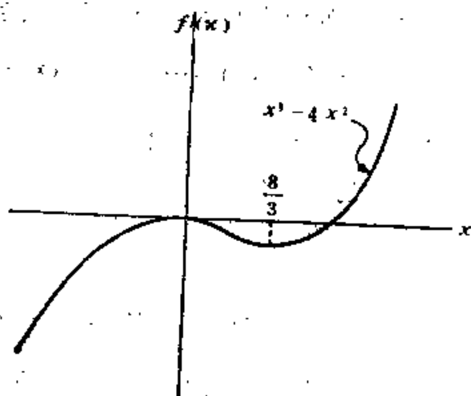


图 2-7

[**解**] **必要条件**：$3x^2-8x=0$ 或 $x(3x-8)=0$，求得

$$x^*=0 \text{ 或 } x^*=\frac{8}{3}$$

充分条件：$H(x^*)=6x^*-8$，当 $x^*=\frac{8}{3}$，$H(x^*)=+8$ 时，极小的充分条件成立。

当 $x^*=0$ 时，$f(0)=0$。当 $x^*=\frac{8}{3}$ 时，$f\left(\frac{8}{3}\right)=-\frac{256}{27}$。

例2-11 $\min x_1^4+6x_1^2x_2^2+x_1x_2^3-6x_1x_3^3-x_2x_3+4x_3^3$

必要条件：

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=4x_1^3+12x_1x_2^2+x_2^3-6x_3^3=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=12x_1^2x_2+3x_1x_2^2-x_3=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}=-18x_1x_3^2-x_2+12x_3^2=0$$

充分条件：H 正定，其中

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}$$

且 $f_{11}=12x_1^2+12x_2^2$，　$f_{12}=24x_1x_2+3x_2^2=f_{21}$

$f_{22}=2x_1^2+6x_1x_2$，$f_{13}=-18x_3^2=f_{31}$

$f_{33}=-36x_1x_3+24x_3$，$f_{23}=-1=f_{32}$

三、计　算

使用上一段中的必要条件来确定极大和极小，称为最优化的间接方法。这是因为，为了获得数值结果，则必须求解另一个计算问题。求解用

$$\nabla f(\mathbf{x}_0)=0$$

所描述的非线性方程组，一般说来这不是一个轻易能解出的问题。除了极为简单的情形外，这一组联立方程几乎都有许多解，为了获得全局性的结果，必须求出它的每一个解。同时还要计算每个驻点上的 Hesse 矩阵，以确定哪一个点是极大，哪一个点是极小。然后，为确定全局极小，还必须比较所有极小点上的目标函数值。在 $f(\mathbf{x})$ 是高阶非线性的情况下，甚至写出梯度的解析表达式也会是一件很艰巨的任务。

在第六章中将讨论直接的最优化方法，它是通过处理最优化问题本身来获得数值结果，而不是通过提出中间条件（比如必要和充分条件）然后再去求解来获得数值结果。

有许多数值方法可以用于求解非线性方程组，这些方法在为数众多的数值分析书里都有阐述。为了完整起见，这里

介绍其中的一种方法，即 Newton–Raphson 方法。这种方法对求解函数的根值问题

$$f(x)=0$$

来说，是著名的 Newton 法的推广。为了求解上述方程，先在某点 x_0 用该点函数的切线逼近 x 轴，然后找出切线和 x 轴的交点 x_1。再从新的点 x_1 重复这一过程，直到算法收敛为止。

这一方法按下列递推关系式确定出一个点列

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

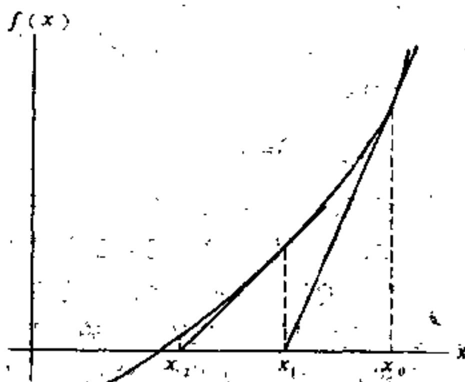


图 2–8

图2–8给出了这种点列的例子，这一方法如果是收敛的，它总是收敛得很快。收敛的速度明显地依赖于解的初始估计值，当 x_0 接近于真实解时，收敛加快。

例2–12 用Newton法计算平方根是很有用的，为了计算

$$x=\pm\sqrt{a}$$

必须求出

$$f(x)=x^2-a=0$$

的根。此时 Newton 算法是

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2-a}{2x_n}$$

当 $a=8$ 及 $x_0=3.0$ 时，前三次迭代为：

迭代	x_n	x_n^2
1	3.000	9.000
2	2.833	8.026
3	2.829	8.003

现在我们把 Newton 法的思理加以推广，以求解从最优化的必要条件导出的 $\nabla f(\mathbf{x})=0$ 形式的联立方程组。为此，首先把该方程组展成一阶 Taylor 级数并令它为零

$$\nabla f(\mathbf{x}_{n+1})=\nabla f(\mathbf{x}_n)+\nabla\nabla f(\mathbf{x}_n)(\mathbf{x}_{n+1}-\mathbf{x}_n)=0$$

矩阵 $\nabla\nabla f(\mathbf{x}_n)$ 正好是 $f(\mathbf{x}_n)$ 的 Hesse 矩阵，这里用 $\mathbf{H}(\mathbf{x}_n)$ 表示。解出 $\mathbf{x}_{n+1}$ 得到

$$\mathbf{x}_{n+1}=\mathbf{x}_n-\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}_n)\nabla f(\mathbf{x}_n)$$

如果对于所有的 $\mathbf{x}_n$，$\mathbf{H}(\mathbf{x}_n)$ 都是正定(或负定)的，则算法非常快地收敛。于是只有当 $f(\mathbf{x})$ 是严格凸的(凹的)，收敛性才不依赖于 $\mathbf{x}_0$ 的值。但是，实际上对于更广泛的函数类，如果能够找到一个适当的初始点 $\mathbf{X}_0$，则常常是收敛的。这一方法的缺点之一是，每一次迭代都要计算 $f(\mathbf{x})$ 所有的二阶偏导数。如果 $f(\mathbf{x})$ 是二次的，则 Hesse 矩阵不随 $\mathbf{x}_n$ 变

化，因此对于各次迭代 H^{-1} 都是常数矩阵。在计算上十分希望避免每一次迭代都计算 H^{-1}。由于这个原因，在求驻点时，常常用二次函数来逼近非线性函数。

$H^{-1}(x_n)$趋于奇点的例子，见习题2-10。

习 题 与 题 解

一 极大、极小和鞍点

2-1　设$f(x,\ y)=(y-x^2)(y-2x^2)$。证明尽管在过原点的任意直线上，$f(x,\ y)$在$(0,\ 0)$点都有局部极小，但原点仍是鞍点。

［证］ 原点满足驻点的必要条件是：

$$f_x=-6xy+8x^3=0$$
$$f_y=-3x^2+2y=0$$

计算高阶偏导数，有

$$f_{xx}=(-6y+24x^2)|_{0,0}=0,\quad f_{xxx}=48x|_{0,0}=0$$
$$f_{xy}=f_{yx}=-6x|_{0,0}=0,\quad f_{xxy}=-6$$
$$f_{yy}=2,\quad f_{xyy}=0$$
$$f_{yyy}=0$$

并将$f(x,\ y)$在原点展开成 Taylor 级数至三阶项，

$$f(dx,dy)=f_x dx+f_y dy+\frac{1}{2!}[dx,dy]\begin{bmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}dx\\ dy\end{bmatrix}$$
$$+\frac{1}{3!}[f_{xxx}(dx)^3+3f_{xxy}(dx)^2dy$$
$$+3f_{yyx}dx(dy)^2+f_{yyy}(dy)^3]$$

我们看出

$$f(dx,\ dy)=(dy)^2-3(dx)^2dy$$

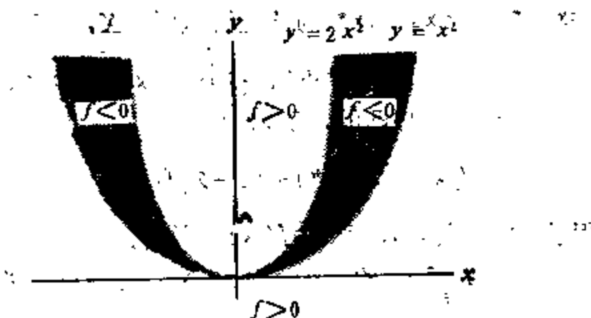


图 2-9

对于足够小的 dx 和 dy，二次项是优势项。但是二次项与 dx 无关，所以它没有给出关于 $f(x, y)$ 在原点性质的充分信息，考察三次项可看出，dy 符号的变化将引起 $f(x,y)$ 符号的变化(看图2-9)，因此原点是鞍点。

沿着通过原点的任何一条直线 $y=mx$，$m\neq0$，$f(x, y)$ 作为 x 的函数为

$$g(x)=m^2x^2-3mx^3+2x^4$$

$$\frac{dg}{dx}=2m^2x-9mx^2+8x^3=0,$$

$$\frac{d^2g}{dx^2}=2m^2-18mx+24x^2$$

当 $x=0$ 时，$\frac{dg}{dx}=0$，$\frac{d^2g}{dx^2}=2m^2>0$，这充分保证原点是局部极小。

2-2 设 $f(x)$ 是凸集 X 上的严格凸函数，证明强局部极小也是全局极小。

［证］ 设 $x, x^* \in X$，x_0 是局部极小，x^* 是全局极小，假定

$\neq x_0 x^*$，那么x_0与x^*的凸组合也属于X，即

$$\hat{x}=\lambda x^*+(1-\lambda)x_0\in X,\ 0<\lambda<1$$

因为$f(x)$是严格凸的，所以

$$f(\hat{x})<\lambda f(x^*)+(1-\lambda)f(x_0)$$

但$f(x^*)\leqslant f(x_0)$，所以$f(\hat{x})<f(x_0)$

现在考虑x_0的某个ε邻域N_ε，使$0<\varepsilon<|X^*-X_0|$，则有

$$0<\lambda=\frac{\varepsilon}{|x^*-x_0|}<1,\quad 且\ \hat{x}\in N_\varepsilon$$

所以$f(x_0)<f(\hat{x})$，这就会导致矛盾。因为$f(x_0)$是强部极小值。因此$x^*=x_0$。

无约束问题

2-3　求函数$f(x)=x^2-x^3$的驻点。

［解］　$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-3x^2$，那么$2x\left(1-\frac{3}{2}x\right)=0$，此时

$x^*=0$，$x^*=2/3$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2-6x\bigg|_{x^*=0}=2>0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2-6x\bigg|_{x^*=\frac{2}{3}}=-2<0$$

因此$x^*=0$是局部极小，而$x^*=2/3$是局部极大。当然全局极大和全局极小分别在$x^*=-\infty$和$x^*=\infty$处。

2-4　试给出本章讨论的各种最优化问题的充分条件。

［解］　从Taylor级数展开式可知，一旦满足必要条件$\nabla f(x)=0$，则优势项就是

$$x^THx$$

关于H的下列条件是右边所指出的最优化的充分条件。

H	x^*
正定	强局部极小
负定	强局部极大
半正定	强局部极小
半负定	强局部极大
不定	鞍点
恒等于零	不能由H确定检查高次项

2-5 设 $f(x)$的前 k 阶导数在 x^* 全为零，试确定强局部极大的充分条件。

［**解**］ 如果前 k 阶导数为零，那么 Taylor 级数的优势项是

$$f(x^*+\Delta x)-f(x^*)=\frac{1}{(k+1)!}\sum_{j_1}\sum_{j_2}$$

$$\cdots\cdots\sum_{j_{k+1}}\frac{\partial^{k+1}f}{\partial x_{j_1}\cdots\cdots\partial x_{j_{k+1}}}(X^*)\Delta x_{j_1}\cdots\Delta x_{j_{k+1}}$$

对于强局部极大，$f(x^*+\Delta x)<f(x^*)$。

第一种情况：如果 k 是奇数，则 $k+1$ 是偶数，那么局部极大的条件是

$$\sum_{j_1}\sum_{j_2}\cdots\sum_{j_{k+1}}\frac{\partial^{k+1}f}{\partial x_{j_1}\cdots\partial x_{j_{k+1}}}(x^*)<0$$

第二种情况：如果 k 是偶数，则 $k+1$ 是奇数，那么 $\Delta x_{j_1}\Delta x_{j_2}\cdots\Delta x_{j_{k+1}}$ 可能有不同的符号；因此 $k+1$ 阶导数

也必须为零，并且

$$\sum_{j_1}\sum_{j_2}\cdots\sum_{j_{k+2}}\frac{\partial^{k+2}f}{\partial x_{j_1}\cdots\partial x_{j_{k+2}}}(\mathbf{x}^*)<0$$

2-6 试求习题1-11中的二次型的 $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{x}^*$是极大、极小、还是鞍点？

［解］ 因为 $y=\mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{x}+\mathbf{g}^T\mathbf{x}$，所以有

$$\nabla y(\mathbf{x})=2\mathbf{H}\mathbf{x}+\mathbf{g}=0 \text{及} \mathbf{x}^*=-\frac{1}{2}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{g}$$

$$(a)\ \mathbf{H}^{-1}=\begin{bmatrix}14 & -3 & -5\\ -3 & 1 & 1\\ -5 & 1 & 2\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}^*=-\frac{1}{2}\mathbf{H}^{-1}\begin{bmatrix}4\\ -2\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-23.5\\ 5.5\\ 8\end{bmatrix}$$

$h_{11}=1>0$，$h_{11}h_{22}-(h_{12})^2=2>0$，$|\mathbf{H}|=1>0$，因此 $\mathbf{H}$ 是正定的，$\mathbf{x}^*$ 是极小。

$$(b)\ \mathbf{H}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 21 & 17\\ 2 & 17 & 14\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}^*=-\frac{1}{2}\mathbf{H}^{-1}\begin{bmatrix}-2\\ -4\\ -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\ 95\\ 78\end{bmatrix}$$

$h_{11}=5$，$h_{11}h_{22}-(h_{12})^2=2>0$，$|\mathbf{H}|=1>0$

因此 $\mathbf{H}$ 是正定的，$\mathbf{x}^*$ 是极小。

$$(c)\ \mathbf{x}^*=-\frac{1}{2}\mathbf{H}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$h_{11}=1>0$，$h_{11}h_{22}-(h_{12})^2=1>0$，$|\mathbf{H}|=-2<0$

H 是不定的，因此 $\mathbf{x}^*$ 是鞍点。

2-7　试求 $1-e^{-x^2}$ 的极值点。

［解］ $\frac{df}{dx}=-e^{-x^2}(-2x)=0$，因为 $e^{-x^2}>0$，所以 $x^*=0$。

$$\frac{d^2f}{dx^2}=-4x^2e^{-x^2}+2e^{-x^2}\Big|_{x^*=0}=2>0$$，因此 x^* 是极小。

2-8　对 $f(\mathbf{x})=x_1x_2$，试求驻点，并证明它是鞍点。

［解］ $\frac{\partial f}{\partial x_1}=x_2^*=0$，　$\frac{\partial f}{\partial x_2}=x_1^*=0$

因为函数只有两个自变量，我们可以检验判别式

$$\Delta=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2$$

$$\Delta=(0)(0)-1^2=-1$$

因为 $\Delta<0$，所以 $\mathbf{x}^*=0$ 是鞍点。

计算

2-9　利用 Newton-Raphson 方法求解

$$\min 4x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+x_1+x_2$$

［解］ $\nabla f(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}8x_1+2x_2+1\\2x_1+4x_2+1\end{bmatrix}=0$，$\mathbf{H}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}8&2\\8&4\end{bmatrix}$，

$$\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x})=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&4\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{n+1}=\mathbf{x}^n-\mathbf{H}^{-1}\nabla f(\mathbf{x}^n)$$

代入有　$x_1^{n+1}=x_1^n-\frac{1}{14}[16x_1^n+4x_2^n+2-2x_1^n-4x_2^n-1]$

$x_2^{n+1}=x_2^n-\frac{1}{14}[-8x_1^n-2x_2^n-1+8x_1^n+16x_2^n+4]$

或 $$x_1^{n+1}=x_1^n-x_1^n-\frac{1}{14}=-\frac{1}{14}$$

$$x_2^{n+1}=x_2^n-x_2^n-\frac{3}{14}=-\frac{3}{14}$$

因此 Newton-Raphson 方法解线性方程组，不管初始估计值 $\mathbf{x}_0$ 为何值，一次迭代成功。

2-10 考虑图 2-10(*a*)给出的函数。从 $x_0=4$ 开始用 Newton-Raphson 方法进行图解。注意，因为 $f'(x_0)$和 $f'(x_1)$越来越趋于平直(奇异情形)，此时解法发散。

[**解**] 用图解法参看图2-10(*b*)。

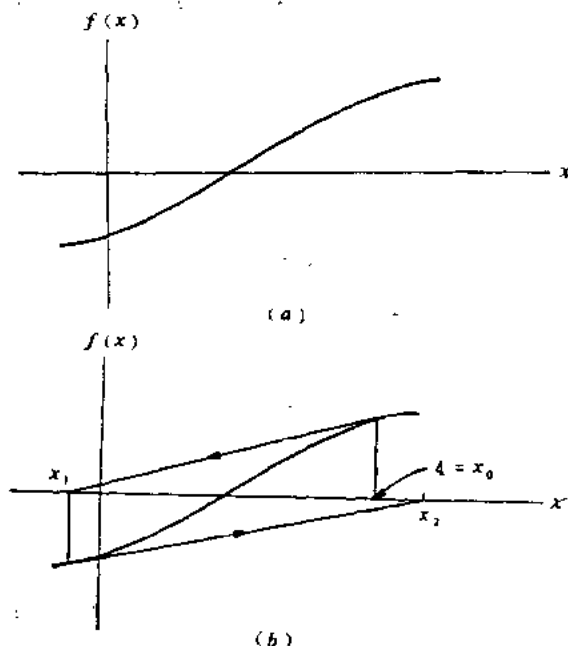


图 2-10

补 充 题

2-11　证明(0,0)是函数$(a)\ y=x_1^3+x_2^3$和$(b)\ y=x_1x_2$的鞍点。

2-12　将下列目标函数写成$y=\mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{x}$的形式，并求出$\mathbf{x}^*$，

(a) $y=x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3+3x_2^2+2x_2x_3$
$\qquad +5x_3^2+4x_1-2x_2+3x_3$

(b) $y=5x_1^2+12x_1x_2-16x_1x_3+10x_2^2$
$\qquad -26x_2x_3+17x_3^2-2x_1-4x_2-6x_3$

(c) $y=x_1^2-4x_1x_2+6x_1x_3+5x_2^2-10x_2x_3+8x_3^2$

2-13　对于题2-12，试确定$\mathbf{x}^*$是不是极大或极小。

2-14　求$f(x_1,x_2)=(x_1-a_1^2x_2)(x_1-a_2^2x_2^2)$的极大，其中$a_1$和$a_2$是常数，且$a_1^2\neq a_2^2$。

2-15　$f(x_1,\ x_2)$有相对极大的充分条件是二次型

$$\mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{x},\quad \mathbf{x}^T=[x_1,\ x_2]$$

为负定，试推导构成与此等价的充分条件的两个不等式。

2-16　确定函数：

(a) $y=-3x^4+9x^2-20$

(b) $y=x^4-8x^3+24x^2-35x+16$

的所有驻点的位置和类型。

2-17　求函数$y=x^x$在$x>0$的极小。

2-18　求$y=x^2-e^{-x^2}$的全局极小。

2-19　求$y=e^{-x}/(1+e^{-x})$的极大和极小。

2-20　把一根导线截成两段，将一段弯成圆形，另一

段作成正方形，如果要使圆和正方形所围成区域的面积总和为最小，这根导线应以什么比例截断？（提示：直接代入。）

2-21 一个无盖的矩形大桶，四壁和底面积总和为$108m^2$，如果要使该桶具有最大的体积，试求此矩形桶的长、宽、高。

2-22 求解 $\min x_1^2+4x_2^2-4x_1$，且使 $2x_2-x_1=12$。

2-23 在 $x=0$ 时把$\sqrt{1+2x}$展开成 Taylor 级数，如果把高于一阶的项均忽略，试确定在 $x=0.1$ 处的误差。

2-24 如果把高于二阶的项均忽略，再解习题2-23。

2-25 在 $x=1$ 时，把 $\ln x$ 展开成 Taylor 的级数。若忽略高于二阶的项，确定在 $x=1.05$ 点的误差。

2-26 利用 Newton-Raphson 方法，求出 $xe^x-2=0$的实根。

2-27 利用 Newton-Raphson 方法，求出 $\sin x-(x+1)/(x-1)=0$ 的根。

2-28 利用 Newton-Raphson 方法，求出 $x^3-5x^2-6x+4=0$ 的根。

2-29 利用 Newton-Raphson 方法，完成二次迭代，求

$$1-3000x^{-2}y^{-1}=0$$

$$2-4000x^{-1}y^{-2}=0$$

的正根，初始点取在：

(a) $(x, y)=(8, 3)$

(b) $(x, y)=(10, 5)$

(c) $(x, y)=(1, 2)$

第三章　约束和Lagrange乘子

一、拉格朗日乘子

现在回到第一章提出的约束最优化问题，首先考虑只有等式约束的情形。问题的提法如下：

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

且使 $g_i(\mathbf{x})=0$，$i=1, 2, \cdots, m<n$

问题是要确定一点 $\mathbf{x}^*$，它使 $f(\mathbf{x})$ 有强相对极小值，并且满足约束条件。显然，等式约束的存在大大缩小了可行域。Lagrange 于 1760 年首先提出的一种解法，是将约束乘以 Lagrange 乘子 λ_i，$i=1,2,\cdots,m$ 并附加到目标函数上，形成一个新的无约束问题。新目标函数 $L(\mathbf{x},\lambda)$ 称为 Lagrange函数。因为它有 $m+n$ 个未知数，所以是定义在空间 E^{n+m}上，这样，新问题就比原问题有更高的维数。这是为了去掉约束所付出的代价。因为由

$$L(\mathbf{x},\lambda)=f(\mathbf{x})+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(\mathbf{x})$$

所定义的问题是无约束的，所以能够用在第二章中给出的驻点必要条件。这些条件是

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}=\frac{\partial f}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial g_i}{\partial x_j}=0, \quad j=1,2,\cdots,n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}=g_i(\mathbf{x})=0, \quad i=1,2,\cdots,m$$

这是包含 $m+n$ 个未知数$(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$的 $m+n$ 个方程的方程组，为了求最优解$(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$就要解这组方程。注意条件

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}=0, \quad i=1,2,\cdots,m$$

保证了在最优点上满足约束。这时 $g_i(\mathbf{x})=0$, $i=1,2,\cdots,m$, 并且 Lagrange 函数的最优值就等于原问题的最优值。即

$$L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)=f(\mathbf{x}^*)$$

然而我们注意到，即使 $f(\mathbf{x})$是严格凸的，并且在 $\mathbf{x}^*$ 有极小值，Lagrange 函数的曲面在$(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$也不是严格凸的。关于这一点在第四章中还要作进一步讨论。由于上述的驻点条件只是必要条件，因此，可以不加改变地运用到求极小值和极大值问题上。但是，只有当这一无约束问题的解存在①时，这一方法才能获得正确的解。一般说来，这意味着我们在对凸型函数求极小，面对凹型函数求极大。

例 3-1

$$\max x_1^2+4x_2^2$$

$$\text{且使} x_1+2x_2=6$$

［**解**］ 这时有

$$L=x_1^2+4x_2^2+\lambda(x_1+2x_2-6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=2x_1+\lambda=0, \frac{\partial L}{\partial x_2}=8x_2+2\lambda=0$$

---

① 应该是原约束问题的解存在——译者注。

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=x_1+2x_2-6=0$$ 因而 $x_1^*=3$，$x_2^*=\frac{3}{2}$，$\lambda^*=-6$。但是，因为这一求极大的问题其解是无界的，即 $x_1^*=\pm\infty$，$x_2^*=\mp\infty$，$f(x_1^*,x_2^*)=\infty$。因此所得 x_1^*，x_2^*是下列问题的解。

$$\min x_1^2+4x_2^2$$

$$\text{且使 } x_1+2x_2=6$$

通常，如果有的等式约束可以对于一个或几个变量显式地解出来，那么最好是利用这个关系从原问题中消去这些变量。这样既降低了问题的维数，又减少了约束的个数，一旦解出了这简约后的问题，那些显式的等式约束就可以用来求出被消去的变量的最优值。

例 3-2 $\min x_1^2+2x_2^2+x_3^2$

且使 $x_1^2+3x_1x_2+x_2^2=1$，$x_2+x_3=4$

［解］ 首先用 $x_3=4-x_2$ 消去 x_3，则得

$$L(x_1,x_2,\lambda)=x_1^2+2x_2^2+(4-x_2)^2+\lambda[x_1^2+3x_1x_2+x_2^2-1]$$

由此产生三个必要条件方程

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=2x_1+2\lambda x_1+3\lambda x_2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=4x_2-2(4-x_2)+3\lambda x_1+2\lambda x_2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=x_1^2+3x_1x_2+x_2^2-1=0$$

如果将 Lagrange 函数写作

$$L(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \lambda_1,\ \lambda_2)$$

$$=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+\lambda_1[x_1^2+3x_1x_2+x_2^2-1]$$

$+\lambda_2(x_2+x_3-4)$

将会产生含五个未知数的五个方程：

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=2x_1+2\lambda_1 x_1+3\lambda_1 x_2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=4x_2+3\lambda_1 x_1+2\lambda_1 x_2+\lambda_2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3}=2x_3+\lambda_2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}=x_1^2+3x_1x_2+x_2^2-1=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}=x_2+x_3-4=0$$

例 3-3 $\min(x_1-2)^2+(x_2-2)^2$

且使 $x_1+x_2=6$

[**解**] 无约束问题的解由

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=2(x_1-2)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=2(x_2-2)=0$$

给出，由此得到 $x_1^*=2$，$x_2^*=2$，且 $f(x_1^*,x_2^*)=0$。

利用约束条件消去 x_2，得到

$$\min(x_1-2)^2+(6-x_1-2)^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=2(x_1-2)-2(4-x_1)=0$$

或者 $x_1^*=3$，$x_2^*=6-3=3$，且 $f(x_1^*,x_2^*)=(3-2)^2+(3-2)^2=2$。

有约束的解与无约束的解都表示在图 3-1 中。

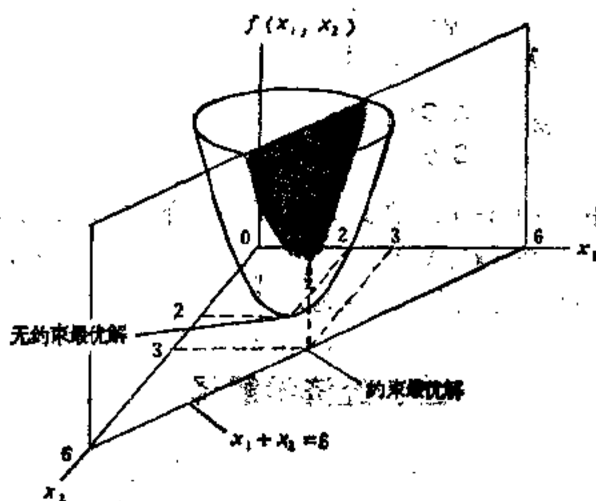


图 3-1

通常，约束的存在不能改善无约束情况下目标函数的值。这是因为约束的存在仅仅是限制了可行域。因而在整个 E^n 上搜索得到的最优值，不可能被仅仅在 E^n 的一个子集上的搜索所改进。

例 3-4 $\min\limits_{\mathbf{x}} \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}^T\mathbf{x}$

且使 $\mathbf{C}\mathbf{x}=\mathbf{d}$

$\mathbf{A}$ 是 $n\times n$ 正定矩阵，$\mathbf{C}$ 是 $m\times n$ 矩阵，且 $m<n$。

［解］ 这时 $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})=\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}^T\mathbf{x}+\boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{C}\mathbf{x}-\mathbf{d})$

且 $\nabla_{\mathbf{x}}L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)=\mathbf{A}\mathbf{x}^*+\mathbf{b}+\mathbf{C}^T\boldsymbol{\lambda}^*=0$

$\nabla_{\lambda}L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)=\mathbf{C}\mathbf{x}^*-\mathbf{d}=0$

或者 $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}^T\\ \mathbf{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}^*\\ \boldsymbol{\lambda}^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\mathbf{b}\\ \mathbf{d}\end{bmatrix}$

解是 $\begin{bmatrix} \mathbf{x}^* \\ \boldsymbol{\lambda}^* \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{b} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix}$

其中 $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$

是$(m+n)\times(m+n)$方阵。如果M是非奇异的，则可以求它的逆，因而解$(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$存在而且是能够求出来的。关于Lagrange乘子的存在性问题，将在下一节讨论。

二、经济学解释

前面对于Lagrange乘子的讨论，只是作为求解约束最优化问题的一种代数方法，而没有赋予它们的数值以任何重要意义。但是，Lagrange乘子有一种很有意思的经济学解释，而且它的数值也常常是很重要的。为了便于讲述这个解释，我们提出如下的问题

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

且使 $g_i(\mathbf{x}) = b_i \qquad i=1,2,\cdots,m<n$

其中数值b_i看作是某些按约束条件限定的稀有资源的数量。显然，当资源的数量b_i变化时，最优解$(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$也将变化。于是我们可以写作：

$$L(\mathbf{b}) = f(\mathbf{x}(\mathbf{b})) + \boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{b})[\mathbf{g}(\mathbf{x}(\mathbf{b})) - \mathbf{b}]$$

对b_i求导数得到

$$\frac{\partial L}{\partial b_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial b_i} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial b_i} - \lambda_i$$

$$+\sum_{k=1}^{m}[g_k(x)-b_k]\frac{\partial \lambda_k}{\partial b_i}$$

或写作矩阵形式

$$\nabla_b L=\left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{b}}\right]\nabla_x f+\left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{b}}\right]\left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{g}}\right]\boldsymbol{\lambda}+$$

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial \mathbf{b}}\right]\ [g(\mathbf{x})-\mathbf{b}]\ -\boldsymbol{\lambda}$$

其中$[\partial \mathbf{x}/\partial \mathbf{b}]$, $[\partial \mathbf{g}/\partial \mathbf{x}]$, 和$[\partial \lambda/\partial \mathbf{b}]$为适当定义的矩阵，维数分别是$m\times n$, $n\times m$, 和$m\times m$。并项，得到

$$\nabla_b L=\left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{b}}\right]\left[\nabla_x f+\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\boldsymbol{\lambda}\right]+\left[\frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial \mathbf{b}}\right][\mathbf{g}(\mathbf{x})-\mathbf{b}]-\boldsymbol{\lambda}$$

因为必要条件 $\nabla_x L=\nabla_\lambda L=0$, 所以最优点上的前两项变为0，只留下

$$\nabla_b L(\mathbf{x}^*,\ \boldsymbol{\lambda}^*)=-\boldsymbol{\lambda}^*$$

或者又因为在最优点上$L(\mathbf{x}^*,\boldsymbol{\lambda}^*)=f(\mathbf{x}^*)$, 有：

$$\frac{\partial L}{\partial b_i}(\mathbf{x}^*,\boldsymbol{\lambda}^*)=\frac{\partial f}{\partial b_i}(\mathbf{x}^*)=-\lambda_i^*,\ i=1,2,\cdots,m$$

如果我们把目标函数看作利润的美元数，则λ_i^*可以解释为每单位第i种资源的利润的美元数。由于这一解释有价格的尺度，所以有时 Lagrange 乘子又称作**影子价格** (Shadow Prices)。

由上述结果直接得出的另一解释，是 Lagrange 乘子代表**灵敏度系数**。这意味着当所有资源按最优方式分配时，量$-\lambda_i^*$给出第i种资源(单位)追加量的边际利润值。如果改变$f(x)$的符号把求极大的问题化为求极小问题，也就改

变了所有 $\lambda_i^*\ i=1,2,\cdots,m$ 的符号。这时为了避免混淆，在把乘子解释为灵敏度时，仍然变回到原问题是明智的。

例 3-5 考虑一种稀有资源在两个过程之间的最优分配问题。该稀有资源的总量为 b(见图 3-2)，希望从这两个过程中获得的利润总和为最大。因此有

$$\max_{x_1,\ x_2}\ f(x_1)+f(x_2)$$

$$\text{且使}\quad x_1+x_2=b$$

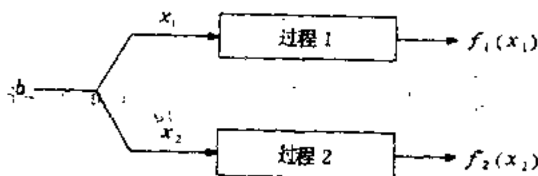


图 3-2

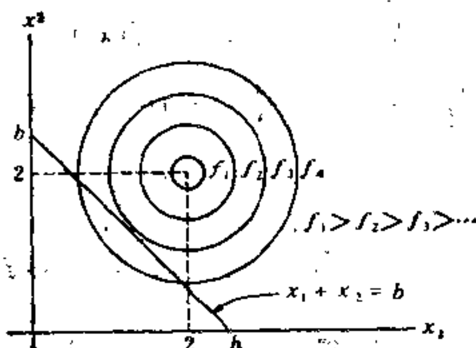


图 3-3

［解］ 如果 $f(x_1)=50-(x_1-2)^2$，$f(x_2)=50-(x_2-2)^2$，那么(如图 3-3)

$$L=(100-x_1-2)^2-(x_2-2)^2+\lambda[x_1+x_2-b]$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=-2(x_1-2)+\lambda=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=-2(x_2-2)+\lambda=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=x_1+x_2-b=0$$

且 $\quad x_1^*=x_2^*=b/2,\ \lambda^*=b-4$

灵敏度 $\quad -\lambda^*=\frac{\partial f}{\partial b}(x^*)=4-b$

意味着在 $b<4$ 时，b 的增加会有正利润；而当 $b>4$ 时，b 的增加会有负利润或亏损。如果 $b=4$，则 $\lambda^*=0$，约束和无约束问题的解是相同的。

Lagrange 乘子本身可以用来解决某种类型的决策问题。例如，设第 i 种资源的追加量可以以单价 y 美元购得，那么当 $-\lambda_i^*>y$ 时，就应当买进这种资源。也就是说，如果第 i 种资源追加一单位，作最优分配时所得边际利润 $-\lambda_i^*$ 比边际成本 y 要大，那么购进第 i 种资源的追加量是有利可图的。

例 3-6 在例 3-5 中，假设追加资源的成本为每单位一美元，且 $b=2$ 时，那么利润 $-\lambda^*=2$ 大于成本 $y=1$，因而应当购进，直到 $b=3$ 为止。那时 $-\lambda^*=1=y$，并且按这一成本再进一步加进资源就是亏本的了。如果 $b>4$，无论什么价格，即使是免费的，也不应该再购买和追加资源。

三、λ的存在性

如果将Lagrange乘子看作一项代数方法，用了它能使约束最优化问题的求解成为可能，那么它的存在性就不能在纯粹的实际解释的基础上来论证，而应给出数学论证。但是，因为乘子仅仅是与约束相关联的，所以在直观上，考虑它们的存在性取决于约束的性质，这似乎是合理的。为了证明这一点，考虑Lagrange函数

$$L=f(\mathbf{x})+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(\mathbf{x})$$

并得到必要条件

$$\nabla_x f(\mathbf{x})+\left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right]\lambda=0, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x})=0$$

其中 $\partial \mathbf{g}/\partial \mathbf{x}$ 是 $n\times m$ 矩阵。

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}=\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

假设已找到最优解的某个候选点 $\mathbf{x}^0$，满足约束 $\mathbf{g}(\mathbf{x}^0)=0$。如果该点是最优的，则必须存在某个 λ，使得

$$\left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right]_{\mathbf{x}^0}\lambda=-\nabla_x f(\mathbf{x}^0)$$

由于在 $\mathbf{x}^0$ 点计值的 $n\times m$ 矩阵 $[\partial \mathbf{g}/\partial \mathbf{x}]_{\mathbf{x}^0}$ 是完全确定的，那么如果有一子矩阵 $\mathbf{G}_m\subset[\partial \mathbf{g}/\partial \mathbf{x}]_{\mathbf{x}^0}$，且 $\mathbf{G}_m$ 是非奇异的，就

可以计算出 λ。这恰是要求矩阵$[\partial g/\partial x]_{x^0}$的秩为$m$，因此，如果在最优点 x^0，$[\partial g/\partial x]_{x^0}$的秩是$m$，则最优乘子存在。但由于计算$[\partial g/\partial x]_{x^0}$的秩要已知最优解 x^0，所以这项存在性结论没有什么实际价值。

例 3-7 求原点到曲线 $y^2-(x-1)^3=0$ 的距离的极小，或求

$$\min\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\text{且使}\quad y=+\sqrt{(x-1)^3},\quad y=-\sqrt{(x-1)^3}$$

［**解**］ 从图形上很容易看出这一问题的解是 $x^*=1$，$y^*=0$(如图 3-4)。

因为 $g(x,\ y)=y^2-(x-1)^3$

$$\left[\frac{\partial g}{\partial x}\right]=\begin{bmatrix}-3(x-1)^2\\2y\end{bmatrix}$$

在(1，0)点求值，得到

$$\left[\frac{\partial g}{\partial x}\right]_{1,0}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}，\text{而}$$

不包含秩为 1 的非奇异子矩阵。

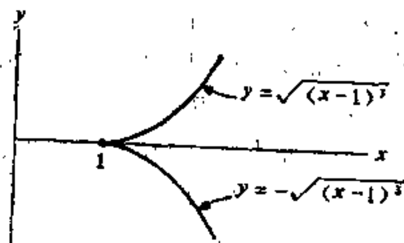


图 3-4

因此，在最优点乘子不存在。写出 Lagrange 函数

$$L=(x^2+y^2)^{1/2}+\lambda[y^2-(x-1)^3]$$

我们有

$$\frac{\partial L}{\partial x}=(x^2+y^2)^{-1/2}x+3\lambda(x-1)^2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=(x^2+y^2)^{-1/2}y+2\lambda y=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=y^2-(x-1)^3=0$$

将(1，0)代入方程得到

$$1-\lambda(0)=0$$

$$0+\lambda(0)=0$$

$$0+0=0$$

显然不存在有限的 λ 值满足第一个方程。

四、不等式约束

第一章提出了含有形如

$$h_j(\mathbf{x})\geqslant 0,\quad j=1,2,\cdots,r$$

的不等式约束的一般非线性规划问题。这一问题将在第四章中直接讨论；但是，为了衔接得更好些，这里通过变不等式约束为等式约束，并应用 Lagrange 理论先得到结果。这一**松弛变数**方法常用于求解简单的不等式约束问题。

首先对每个不等式约束的 $h_j(\mathbf{x})$ 定义一个实松弛变量 θ_j。如果

$$\theta_j^2=h_j(\mathbf{x})\leqslant 0,\quad j=1,2,\cdots,r$$

那么只要对所有的实值 θ_j 满足上面这些等式，各个不等式也就自然满足了。应用 Lagrange 的必要条件

$$L(\mathbf{x},\lambda,\theta)=f(\mathbf{x})+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(h_j(\mathbf{x})-\theta_j^2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial h_j}{\partial x_i}=0,\quad i=1,2,\cdots,n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}=h_j(\mathbf{x})-\theta_j^2=0,\quad j=1,2,\cdots,m$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_j}=-2\lambda_j\theta_j=0,\quad j=1,2,\cdots,m$$

由最后一个方程得到：或 $\lambda_j^*=0$，或$\theta_j^*=0$，或二者同时为 0。下面分三种情况讨论。

(1) 如果 $\lambda_j^*=0$，$\theta_j^*\neq 0$，这时因为 $h_j^*(\mathbf{x}^*)=(\theta_j^*)^2>0$，最优解不因该约束的存在而改变，所以这第 j 个约束即被忽略。例如：若所有的 $\lambda_j^*=0$，$j=1,2,\cdots,m$，则由第一个方程得到

$$\nabla f(\mathbf{x})=0$$

这就是无约束问题的必要条件。

(2) 如果 $\theta_j^*=0$，$\lambda_j^*\neq 0$，则 $h_j(\mathbf{x}^*)=0$，且最优解是在第 j 个约束的边界上。因为 $\lambda_j^*\neq 0$，所以解不满足 $\nabla f(\mathbf{x}^*)=0$。

(3) 如果对所有的 j，$\theta_j^*=0$且 $\lambda_j^*=0$，则 $h_j(\mathbf{x}^*)=0$，并且解满足 $\nabla f(\mathbf{x}^*)=0$ 也就是说各边界皆通过无约束最优点。

例 3-8

$$\min_x (x-a)^2+b$$

$$\text{且使}\quad x \geqslant c$$

［解］ 令 $\theta^2=x-c\geqslant 0$，写出

$$L=(x-a)^2+b+\lambda[x-c-\theta^2]$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=2(x-a)+\lambda=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=x-c-\theta^2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}=-2\lambda\theta=0$$

三种情况是：

(1) $\lambda=0$；则 $x^*=a$ 且 $\theta^2=a-c$，如果 $c<a$，则 θ 是实数且 $\theta\neq 0$，因此当 $c<a$时，最优解为 $x^*=a$［如图 3-5(a)］。

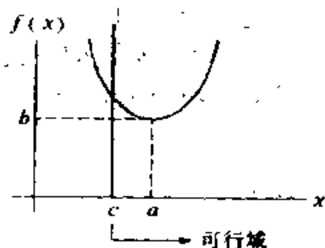
(2) $\theta=0$，所以 $x^*=c$，且最优解在约束边界上。这时 $\lambda^*=2(a-c)$。因为 $\lambda^*\neq 0$，所以当 $c>a$ 时，得到最优解［如图 3-5(b)］。

(3) 如果 $\theta^*=0$，且 $\lambda^*=0$，则 $x^*=c$，并且 $c=a$，［如图 3-5(c)］。

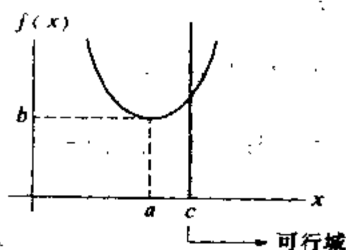
五、计算方法

正如无约束问题的间接方法一样，本章给出的Lagrange方法也导致一个重要的计算问题，即求解由必要条件产生的含有 $m+n$ 个未知数的 $m+n$个联立方程

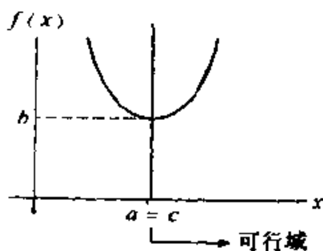
$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*)=0$$



(a)



(b)



(c)

图 3-5

$$\nabla_{\lambda} L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) = 0$$

这同对无约束情形使用间接方法所产生的计算问题属于同一类型，尽管这时维数升高了，复杂性也增加了。有许多数值方法，例如在第二章中讨论过的 Newton-Raphson 方法，

可以用来解这类问题。这些方法是简单明了的，但却常常是不太适用的，特别是当维数 $m+n$ 很大的时候更是如此。

例 3-9 考察用 Newton-Raphson 法解下列方程组的收敛性

$$\nabla_z L(\mathbf{z}^*)=0$$

其中
$$\mathbf{z}=\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \boldsymbol{\lambda}\end{bmatrix}$$

[解] Newton-Raphson 算法是

$$\mathbf{z}_{n+1}=\mathbf{z}_n-\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{z}_n)\nabla_z L(\mathbf{z}_n)$$

其中

$$\mathbf{H}(\mathbf{z}_n)=\begin{bmatrix}\nabla_{xx}L & \nabla_{x\lambda}L\\ \nabla_{\lambda x}L & \nabla_{\lambda\lambda}L\end{bmatrix}_{\mathbf{x}_n,\lambda_n},$$

$$\nabla_z L(\mathbf{z}_n)=\begin{bmatrix}\nabla_x L\\ \nabla_\lambda L\end{bmatrix}_{\mathbf{x}_n,\lambda_n}$$

如果 $\mathbf{H}$ 是正定的就能保证收敛性，其中

$$\mathbf{H}(\mathbf{z}_n)=\left[\begin{array}{c|c}\nabla_{xx}L & \nabla_x g\\ \hline (\nabla_x g)^T & 0\end{array}\right]_{\mathbf{x}_n,\lambda_n}$$

必须检查$\mathbf{H}(\mathbf{z}_n)$的主子式，并对每一种情况应用Sylvester 定理，以决定 $\mathbf{H}(\mathbf{z}_n)$的正定性。为了保证 $\mathbf{H}$ 是非奇异的，至少要求矩阵 $\nabla_{xx}L$ 和$(\nabla_x g)^T(\nabla_{xx}g)^{-1}(\nabla_x g)$ 是非奇异的。

习题与题解

Lagrange 乘子法

3-1 对于标量问题

$$\min_x f(x)$$

$$\text{且使} \quad g(x)=0$$

证明 $L(x,\lambda)$ 在 x^*、λ^* 具有鞍点。

[**证**] 求 $L(x, \lambda)$ 的 Hesse 矩阵，得出

$$\begin{bmatrix} L_{xx} & g_x \\ g_x & 0 \end{bmatrix}_{x^*,\lambda^*}$$

如果 $g_x(x^*)\neq 0$，它的判别式是

$$-[g_x(x^*)]^2<0$$

根据第二章给出的判别准则，判别式为负值对应的点 (x^*,λ^*) 是 (x,λ) 的鞍点。

3-2 对一般情况证明 $L(x,\lambda)=f(x)+(\lambda^T,g(x))$ 以 x^*，λ^* 为鞍点。

[**证**] 设 x 的维数为 n，λ 的维数为 $m<n$。假设在 x^0 存在有限的局部极小，即

$$\min f(x)=f(x^0)，\text{且 } g(x^0)=0$$

进一步假设存在与 x^0 相结合的 λ^0，并设在某个包含 λ^0 的区域内，$L(x,\lambda)$ 有有限极小值存在。现在定义

$$L(x^*, \lambda)=\min_x L(x, \lambda)=H(\lambda)$$

其中 x^* 表示对任意的 λ，$L(x,\lambda)$ 作为 x 的函数的极小；因而若 $\lambda=\lambda^0$ 则 $x^*=x^0$。令 X 为满足 $g(x)=0$ 的所有

x 的集合。则

$$\min_{x\in X} L(x,\lambda)=\min_{x\in X} f(X)=f(x^0)=H(\lambda^0)$$

但是 $$H(\lambda)=\min_{x\in E^n} L(x,\lambda)\leqslant\min_{x\in X} L(x,\lambda)=H(\lambda^0)$$

因此

$$H(\lambda)\geqslant H(\lambda^0)$$

也就是说 $H(\lambda)$在点 λ^0处取得极大值。根据所 作的$L(x,\lambda)$对于 λ^0 邻域内的任意 λ，存在关于 x 的 相对极小的假设，则有

$$L(x^0,\lambda^0)\leqslant L(x,\lambda^0)$$

同样因为 x^0 满足 $g(x^0)=0$，有

$$L(x^0,\ \lambda^0)=f(x^0)=L(x^0,\lambda)$$

因此 $$L(x^0,\lambda)\leqslant L(x^0,\lambda^0)\leqslant L(x,\lambda^0)$$

这符合鞍点的定义。因为左边的不等式实际上是以等式满足的，所以 Lagrange 函数实际上有一退化形式的鞍点。

3-3 确定各边平行于坐标面，并且内接于椭球面

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$

的立方体盒子的最大体积。

[**解**] 目标函数是 xyz，要求其极大 值。Lagrange 函数是

$$L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2-1\right]$$

因此有

$$\frac{\partial L}{\partial x}=yz+\frac{2\lambda x}{a^2}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=xz+\frac{2\lambda y}{b^2}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z}=xy+\frac{2\lambda z}{c^2}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

解是 $x^*=y^*=z^*=\lambda^*=0$，由此得出最小体积 $v^*=0$；另一解是 $x^*=a/\sqrt{3}$，$y^*=b/\sqrt{3}$，$z^*=c/\sqrt{3}$，$\lambda^*=-abc/2\sqrt{3}$，由此得最大体积 $v^*=8\sqrt{3}\,abc/9$。

3-4 求二次型

$$f(x)=x_1x_2$$

的极大和极小，且使

$$x_1^2+x_2^2=1$$

并给出几何说明。

［**解**］ 作 Lagrange 函数

$$L(x_1,x_2,\lambda)=x_1x_2+\lambda(x_1^2+x_2^2-1)$$

则

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=x_2+2\lambda x_1=0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=x_1+2\lambda x_2=0 \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=x_1^2+x_2^2-1=0 \tag{3.3}$$

求解(3.1)，(3.2)和(3.3)，在$(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$和$(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$得出极处小在相应的值为$f(x^*)=-\frac{1}{2}$，

$(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$和$(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$处得极大相应的值为$f(x^*)=\frac{1}{2}$。等值线见图 3-6。

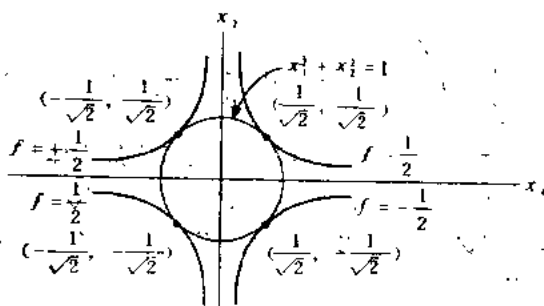


图 3-6

3-5 将半径为 r_0 的实心金属球改铸成实心圆柱体，并使总表面积为最大，试求园柱体的尺寸。

［**解**］ 这个问题可以提作

$$\min_{r,h}\ 2\pi rh+2\pi r^2$$

且使 $\pi r^2h=\frac{4}{3}\pi r_0^3$

其中 r 为圆柱体的半径，h 为高。

作Lagrange 函数

$$L(r,h,\lambda)=2\pi rh+2\pi r^2+\lambda(\pi r^2 h-\frac{4}{3}\pi r_0^3)$$

则
$$\frac{\partial L}{\partial r}=2\pi h+4\pi r+\lambda 2\pi rh=0 \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial h}=2\pi r+\lambda\pi r^2=0 \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=\pi r^2 h-\frac{4}{3}\pi r_0^3=0 \qquad (3.6)$$

解(3.4)和(3.5)得到 $h^*=2r^*$，再由(3.6)式，得出

$$r^*=r_0\left(\frac{2}{3}\right)^{1/3}$$

$$h^*=2r_0\left(\frac{2}{3}\right)^{1/3}$$

$$\lambda^*=-\frac{2}{r_0}\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}$$

最大表面积为 $6\pi r_0^2\left(\frac{2}{3}\right)^{2/3}$。

3-6 用图解法求解

$$\min x_1^2+x_2^2$$

且使 $(x_1-1)^3-x_2^2=0$

[解] 其解如图 3-7 所示。

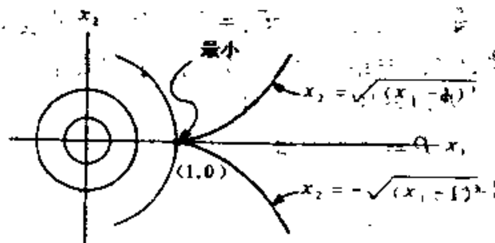


图 3-7

3-7 试证明 3-6 题的 Lagrange 乘子不存在。

[证] Lagrange 函数为

$$L(x_1,x_2,\lambda)=x_1^2+x_2^2+\lambda[(x_1-1)^3-x_2^2]$$

则
$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=2x_1+3\lambda(x_1-1)^2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=2x_2(1-\lambda)=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=(x_1-1)^3-x_2^2$$

显然在(1, 0)点不存在满足这三个方程的 λ。

同时，Jacobi 矩阵为

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial g}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial g}{\partial x_2}\end{bmatrix}_{1,0}=\begin{bmatrix}3(x_1-1)^2\\ -2x_2\end{bmatrix}_{1,0}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

其秩不是 1，不符合 λ 存在性的要求。

3-8 考虑配电问题，由 n 个电站通过电网向 m 个用户供电，要求消耗最小，我们希望确定出最经济的方案，而发电量又满 要求。

[解] 令 P_i＝第 i 个电厂的发电量

$F_i(P_i)$＝第 i 个电厂发电 P_i 的成本

$L(P_1, \cdots, P_n)$＝输电消耗量

D＝总需要量

现在目标为

$$\min_{P_i}\sum_{i=1}^{n}F_i(P_i)$$

而且要满足需要，即

$$\sum_{i=1}^{n}P_i-L(\mathrm{P})=D$$

Lagrange 函数为

$$L(\mathrm{P},\lambda)=\sum_{i=1}^{n}F_i(P_i)+\lambda\left[\sum_{i=1}^{n}P_i-L(\mathrm{P})-D\right]$$

因此

$$\frac{\partial L}{\partial P_i}=\frac{dF_i}{dP_i}+\lambda-\lambda\frac{\partial L}{\partial P_i}=0,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=\sum_{i=1}^{n}P_i-L(\mathrm{P})-D=0 \tag{3.8}$$

由(3.7)式得到

$$\frac{dF_i}{dP_i}=\lambda L_i \tag{3.9}$$

其中 $L_i=\partial L/\partial P_i-1$。

因此最经济的配电方案是开动所有电厂，使每厂发电的边际成本(dF_i/dP_i)对线路损耗系数 L_i 之比为 λ。而 λ 值的选取要保证满足(3.8)式所表示的总需求。

不等式约束

3-9 若 $x^2+y^2\leqslant 1$，求 $2x^2-3y^2-2x$ 的最大值和最小值。

[解] 定义 $\theta^2=1-x^2-y^2$，θ 为实数

则 $L(x,y,\lambda,\theta)=2x^2-3y^2-2x+\lambda(\theta^2-1+x^2+y^2)$

并且

$$\frac{\partial L}{\partial x}=4x-2+2\lambda x=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=-6y+2\lambda y=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=\theta^2-1+x^2+y^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}=2\lambda\theta=0$$

(1) $\theta=0$(约束解)，则有

$$4x-2+2\lambda x=0$$

$$y(2\lambda-6)=0$$

$$x^2+y^2=1$$

有三组解

$$x^*=0.2, y^*=\pm\sqrt{0.96}, \lambda^*=3, f(x^*,y^*)=-3.2 \quad (3.10)$$

$$x^*=1, \quad y^*=0, \quad \lambda^*=-1, \quad f(x^*,y^*)=0 \quad (3.11)$$

$$x^*=-1, \quad y^*=0, \lambda^*=-3, \quad f(x^*,y^*)=x \quad (3.12)$$

(2) $\lambda=0$(无约束解)，则有

$$4x-2=0$$

$$-6y=0$$

$$1+x^2+y^2=\theta^2$$

$$x^*=0.5, \ y^*=0, \ \theta^2=1.25, \ f(x^*,y^*)=-0.5$$

由观察可知，$f(x,y)$的最小值出现在$(0.2, \pm\sqrt{0.96})$处，最大值出现在$(-1, 0)$处。

3-10 如图 3-8 所示装置，要用操纵反应器温度T和输入浓度c_{in}的方法，控制反应器蒸汽的输出浓度c。要求选取c_{in}和T使z取极小值，其中

$$z=(c-c_d)^2+T^2$$

且使 $c=c_{in}+e^T$

$$c_{in}\leqslant K$$

这里c_d是常数，它是所要求的流出物的浓度。试分别对下列两种情况求最优解：

(a) $K=c_d$

(b) $K=c_d-2$

[**解**] 先用等式约束消去c，则可以写出 Lagrange 函

数如下：

$$L(c_{in},T,\lambda,\theta)=(c_{in}+e^{T}-c_d)^2+T^2+\lambda(\theta^2+c_{in}-K)$$

因此

$$\frac{\partial L}{\partial c_{in}}=3(c_{in}+e^{T}-c_d)+\lambda=0 \qquad (3.13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial T}=2(c_{in}+e^{T}-c_d)e^{T}+2T=0 \qquad (3.14)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=\theta^2+c_{in}-K=0 \qquad (3.15)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}=2\theta\lambda=0 \qquad (3.16)$$

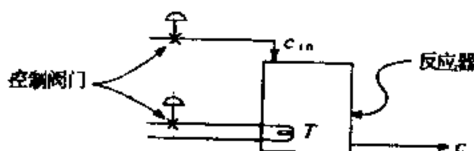


图 3-8

(1) $\lambda=0$(无约束)

$$T^*=0,\ c_{in}^*=c_d-1,\ \theta^2=K-c_{in}^*$$

(*a*) 当 $K=c_d$ 时，$\theta^2=c_d-c_d+1=1$，由于 θ 是实数，满足约束，所以这就是最优解。

(*b*) 当 $K=c_d-2$ 时，$\theta^2=c_d-2-c_d+1=-1$，由于 θ 是虚数，所以当 $K=c_d-2$ 时，最优解一定在边界上。

(2) $\theta=0$(有约束)。这时 $c_{in}^*=K$，或者，在本题中有 $c_{in}^*=c_d-2$。代入(3.13)和(3.14)式得出

$$e^{T^*}(e^{T^*}-2)+T^*=0 \qquad (3.17)$$

以及 $\lambda^*=2(2-e^{T^*})$，对(3.17)式求数值解得到 T^*。

3-11 在下列约束条件下，

$$(x_1-2)^2+(x_2-3)^2\leqslant 4$$

$$x_1^2=4x_2$$

求点(x_1,x_2)到原点的最大和最小距离。

[**解**] 目标函数为

$$\min_{x} x_1^2+x_2^2$$

定义 $\theta^2=4-(x_1-2)^2-(x_2-3)^2\geqslant 0$，则 Lagrange 函数为

$$L(x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2,\theta)=x_1^2+x_2^2+\lambda_1[\theta^2+(x_1-2)^2+(x_2-3)^2-4]+\lambda_2[x_1^2-4x_2]$$

于是有

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=2x_1+2\lambda_1(x_1-2)+2\lambda_2 x_1=0 \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=2x_2+2\lambda_1(x_2-3)-4\lambda_2=0 \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}=\theta^2+(x_1-2)^2+(x_2-3)^2-4=0 \tag{3.20}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}=x_1^2-4x_2=0 \tag{3.21}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}=2\lambda_1\theta=0 \tag{3.22}$$

(1) $\lambda_1=0$

$$2x_1(1+\lambda_2)=0$$

$$2x_2-4\lambda_2=0$$

$$\theta^2=4-(x_1-2)^2-(x_2-3)^2$$

$$4x_2=x_1^2$$

对于 θ 的实数值，不存在满足所有这些方程的解，因此

解必定是出现在下一种情形。

(2) $\theta=0$。从(3.20)和(3.21)式求出二解为(2, 1)，与之相对应的最小值为 $f(x)=5$ 和 (3.86, 3.72)，(近似地)对应的最大值为 $f(x)=28.73$。

3-12 试画出满足下列约束的可行域

$$x_1^2+x_2^2\leqslant 8$$
$$-2x_1+x_2^2\leqslant 0$$
$$x_1x_2\leqslant 4 \qquad (3.23)$$

［解］ 见图 3-9。注意约束(3.22)是多余的。

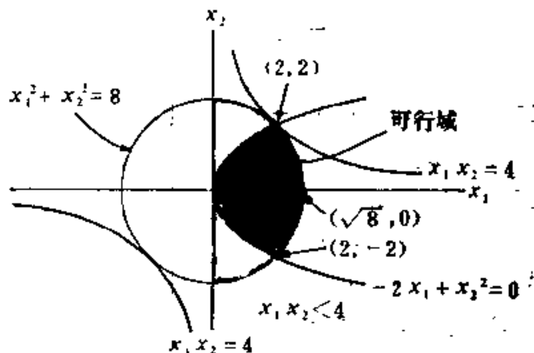


图 3-9

补充题

3-13 画出 3-9 题的等值线。

3-14 用 Newton-Raphson 法求出 3-10 题的 T^*。

3-15 求解问题

$$\min |x_1-2|+|x_2-2|$$

且使 $g_1(x)=x_1-x_2^2\geqslant 0$

$$g_2(x)=x_1^2+x_2^2-1=0$$

3-16 去掉等式约束求解问题 3-15。

3-17 去掉两个约束求解问题 3-15。

3-18 用什么方法求解 3-15 题最有效？为什么？

3-19 两种元素 A、B 的非理想固体混合物，其混合热用下式给出

$$H_m=x_A x_B(a+bx_B+cx_B^2)$$

其中 x_A、x_B 分别为元素 A、B 的摩尔数。在 $x_A+x_B=1$ 的条件下，求此固体混合物的混合热的最大值。

3-20 求 $\max x_1+x_2$

且使 $x_1^2+x_2^2=1$

3-21 求 $\max \exp(-x_1^2+2x_2^2)$

且使 $2x_1+3x_2=4$

3-22 求 $\max \sin x_1 \cos x_2$

且使 $x_1-x_2=0$

3-23 问题 $\max c_1 x_1+x_2$

且使 $x_1^2+x_2^2\leqslant 25$

$x_1-x_2\leqslant 1$

在什么范围内 c_1 值在(4，3)处为最优解？

3-24 用图表示出问题 3-23 的答案。

第四章　不等式约束最优化

第三章中介绍了 Lagrange 乘子的使用，将微积分中的极值必要条件推广到了包含等式约束的问题。同时还提出了用松弛变量将不等式约束变为等式约束的方法，使Lagrange乘子法也能用于不等式约束的问题。虽然人们很早就知道了这些方法，但只是到最近，才建立起处理不等式约束的完备理论。在 1951 年，Kuhn-Tucker 定理以严格的方式，就不等式约束问题本身提供了一组必要条件。这些必要条件除了它们的一般性和完备性之外，同使用 Lagrange 乘子用松弛变数导出的条件相比还多了一个附加条件。

一、Kuhn-Tucker定理

考虑最优化问题

$$\min_{x} f(\mathrm{x})$$

且使　$g_i(\mathrm{x})\geqslant 0$，$i=1, 2, \cdots, r$

其中　　$\mathrm{x}=[x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$

虽然这里没有直接提出等式约束，但并不失一般性，因为总可以将等式约束转变成不等式约束。但是在实际上，等式约束通常是用第三章中的方法来处理，这里将不再讨论有关的结论。跟前几章一样，我们假设 $f(\mathrm{x})$和 $g_i(\mathrm{x})$，$i=1, 2, \cdots, r$，是可微函数。

证明 Kuhn-Tucker 定理的必要条件，首先要定义一个类似 Lagrange 函数(*Lagrange-Likefunction*)的函数

$$L(\mathbf{x},\ \lambda)=f(\mathbf{x})+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i g_i(\mathbf{x})$$

并假定 Lagrange 乘子 λ_i 存在。那么满足

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}^*)$$

且使 $g_i(\mathbf{x}^*)\leqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ r$

的点 $\mathbf{x}^*$，下列条件必须成立：

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*)+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^*\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*)=0,\ j=1,2,\cdots,n \quad (4.1)$$

$$g_i(\mathbf{x}^*)\leqslant 0, \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ r \quad (4.2)$$

$$(\lambda_i^*)g_i(\mathbf{x}^*)=0, \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ r \quad (4.3)$$

$$\lambda_i^*\geqslant 0 \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ r \quad (4.4)$$

或者用更紧凑的写法写成

$$\nabla_{\mathbf{x}}L(\mathbf{x}^*,\ \lambda^*)=0 \quad (4.5)$$

$$\nabla_{\lambda}L(\mathbf{x}^*,\ \lambda^*)\leqslant 0 \quad (4.6)$$

$$(\lambda^*)^T g(\mathbf{x}^*)=0 \quad (4.7)$$

$$\lambda^*\geqslant 0 \quad (4.8)$$

这些结果称为 Kuhn-Tucker 驻点条件，稍后我们还会看到 Kuhn-Tucker 定理涉及鞍点条件的另一形式。

这些条件尽管在极值点必定成立，但它们对于求最优点并不一定是十分有用的。具体说，上述非线性方程和不等式组的求解是一个难度很大的计算问题。对于高维的问题，想通过直接解这些方程来求最优解是难以办到的。

对另外几个最优化问题，明确阐述这些条件是很有益的练习。

例4-11 给出下列问题的 Kuhn-Tucker 驻点条件

$$\max_{x} f(x)$$

且使 $g_i(x) \leqslant 0$，$i=1, 2, \cdots, r$

〔**解**〕 这个问题的必要条件可以通过将上述条件中的 $f(x)$ 换作 $-f(x)$ 得到。即

$$-\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^* \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x^*) = 0, \quad j=1, 2, \cdots, n$$

或者 $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) + \sum_{i=1}^{r} (-\lambda_i^*) \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x^*) = 0, \quad j=1,2,\cdots, n$

改变 λ_i^* 的符号，这一问题的条件就成为

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^* \frac{\partial g}{\partial x_j}(x^*) = 0 \quad j=1, 2, \cdots, n \tag{4.9}$$

$$g_i(x^*) \leqslant 0 \qquad i=1, 2, \cdots, r \tag{4.10}$$

$$(\lambda_i^*) g_i(x^*) = 0 \qquad i=1, 2, \cdots, r \tag{4.11}$$

$$\lambda_i^* \leqslant 0 \qquad i=1, 2, \cdots, r \tag{4.12}$$

例 4-2 确定下列问题的 Kuhn-Tucker 条件

$$\min f(x)$$

且使 $g_i(x^*) \geqslant 0 \qquad i=1, 2, \cdots, r$

〔**解**〕 对于本题的情形，可以只改变上一题条件中 $g_i(x)$ 的符号。于是有

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) + \sum_{i=1}^{r} (-\lambda_i^*) \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x^*) = 0 \qquad j=1,2,\cdots,n$$

$$g_i(x^*) \geqslant 0 \qquad i=1, 2, \cdots, r$$

因此条件变成

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*)+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^*\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x^*)=0 \qquad j=1, 2, \cdots, n$$

$$(4.13)$$

$$g_i(x^*)\geqslant 0 \qquad i=1, 2, \cdots, r \qquad (4.14)$$

$$(\lambda_i^*)g_i(x^*)=0 \qquad i=1, 2, \cdots, r \qquad (4.15)$$

$$\lambda_i^*\leqslant 0 \qquad i=1, 2, \cdots, r \qquad (4.16)$$

例 4-3 确定下列问题的 Khun-Tucker 条件

$$\max_{x} f(x)$$

且使 $g_i(x)\geqslant 0 \qquad i=1, 2, \cdots, r$

〔**解**〕 将正文中的问题，同时改变 $f(x)$和 $g(x)$的符号，得到

$$-\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*)-\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^*\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x^*)=0$$

因此条件成为

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*)+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^*\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x^*)=0 \quad j=1, 2, \cdots, n$$

$$(4.17)$$

$$g_i(x^*)\geqslant 0 \qquad i=1, 2, \cdots, r \qquad (4.18)$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*)=0 \qquad i=1, 2, \cdots, r \qquad (4.19)$$

$$\lambda_i^*\geqslant 0 \qquad i=1, 2, \cdots, r \qquad (4.20)$$

例 4-4 用 Kuhu-Tucker 驻点条件讨论例 3-7。

$$\min_{x} \ (x-a)^2+b$$

且使 $\quad x\geqslant c$

〔**解**〕 定义

$$L(x, \lambda)=(x-a)^2+b+\lambda(x-c)$$

则

$$\frac{\partial L}{\partial x}=2(x-a)+\lambda=0 \qquad (4.21)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=x-c\geqslant 0 \tag{4.22}$$

$$\lambda(x-c)=0 \tag{4.23}$$

$$\lambda\leqslant 0 \tag{4.24}$$

条件(4.23)称为**互补松弛条件**，它要求 $\lambda^*=0$ 或 $x^*=c$（或两者同时成立）。因为前一情况对应于解 $x^*=a$，所以结果为

$$\lambda^*=0 \quad 且\ x^*=a$$

或 $$\lambda^*=2(a-x^*) \quad 且\ x^*=c$$

这样一来，如果 $a\geqslant c$，则解是

$$x^*=a \quad 和 \quad \lambda^*=0$$

如果 $a<c$，则解是

$$x^*=c \quad 和 \quad \lambda^*=2(a-c)<0$$

这里得到的解与例 3-8 中得到的解完全相同。但是，现在有附加条件

$$\lambda^*\leqslant 0$$

我们看到它是成立的。

Kuhn-Tucker驻点条件是必要条件，当 $f(\mathbf{x})$ 和 $g_i(\mathbf{x})$ 是凸函数时，它也是充分条件。这不足为奇，因为这些凸性条件保证局部极小也是全局极小。如果 $f(\mathbf{x})$ 是严格凸的，那末极小也是唯一的。

二、约束规格

从上面的讨论显然可见，λ 很类似于第三章所讨论的 Lagrange 乘子，只是在与等式约束相联结时 λ 可正可负，当同不等式约束相联结时，λ 必须有确定的符号(或正或负仅

取一种符号)。

前边我们假定 λ 是存在的。现在提出一项附加的必要条件，叫做**约束规格**，它保证 λ 的存在(是有限的)。

约束规格：必须存在一个矢量 $\mathbf{h}\in E^n$，使得对于每个**紧**(*binding*)约束有

$$(\nabla g_i(\mathbf{x}^*),\ \mathbf{h})<0 \tag{4.25}$$

也就是说必须对所有紧约束有同一个 $\mathbf{h}$ 使上式成立。

实际上，约束规格难于事先检验，因为这要求有关最优点的知识以便计值。但是，有几种条件，它们的成立使约束规格总是满足的。这些条件如：

1. 所有的不等式约束都是凸的，并且至少存在一个点 $\mathbf{x}$ 严格地在可行域内部(即 $\mathbf{x}$ 不在边界上)。

2. 在 $\mathbf{x}^*$ 点所有紧约束的约束矩阵有最大的秩(回想在等式约束问题中，这是 Lagrange 乘子存在的条件)。

3. 约束都是线性的。

对于包含形式如

$$g_i(\mathbf{x})\geqslant 0 \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ r$$

的不等式约束的最优化问题，不论是求极小问题还是求极大问题，只要将不等式(4.25)反向，就得到这一问题的约束规格。

在下面的例题中，我们说明约束规格的几何性质，并且说明当约束规格不满足时，在最优点上 Kuhn-Tucker 驻点条件不成立。

例 4-5 试证下述问题不满足约束规格，并证明在最优点上乘子不存在。问题为

$$\min_{x_1,x_2}(x_1-2)^2+x_2^2$$

且使 $g_1(x_1, x_2)=x_1\geqslant 0$

$g_2(x_1, x_2)=x_2\geqslant 0$

$g_3(x_1, x_2)=(1-x_1)^3-x_2\geqslant 0$

〔**解**〕 从图 4-1 可见，最优解是 $x_1^*=1$，$x_2^*=0$。在该点紧约束是 $g_2(x_1,x_2)=0$ 与 $g_3(x_1, x_2)=0$，它们的梯度向量是

$$\nabla g_2(1, 0)=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{1,2}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla g_3(1, 0)=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial g_3}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{1,2}=\begin{bmatrix} -3(1-x_1)^2 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

约束规格要求存在同一个向量 **h**，满足

$$(\nabla g_2(1, 0), \mathbf{h})>0$$

与

$$(\nabla g_3(1, 0), \mathbf{h})>0$$

将内积写成另一种形式，就可以得到对约束规格的某种几何解释。与上面两式等价有

$$\|\nabla g_2(1, 0)\| \ \|\mathbf{h}\|\cos\theta_1<0$$

$$\|\nabla g_3(1, 0)\| \ \|\mathbf{h}\|\cos\theta_2<0$$

其中 θ_1 是 $\nabla g_2(1, 0)$和 **h** 之间的夹角，θ_2 是 $\nabla g_3(1, 0)$和 **h** 之间的夹角。任意的 **h** 只要有 $\cos\theta_1>0$和$\cos\theta_2>0$，即

$$-90^\circ<\theta_1<90^\circ \quad 和 -90^\circ<\theta_2<90^\circ$$

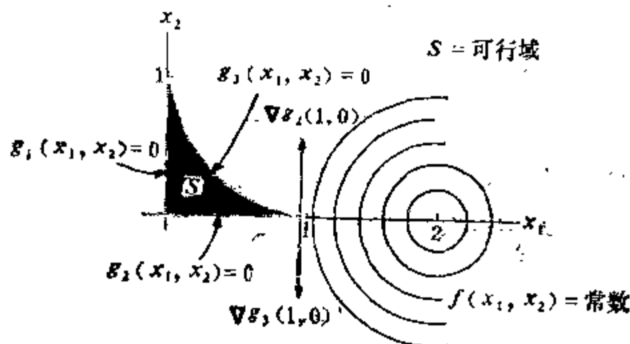


图 4-1

上面的不等式显然成立。但是，没有一个 h 能使两项要求同时满足，因此不满足约束规格(见图 4-2)。

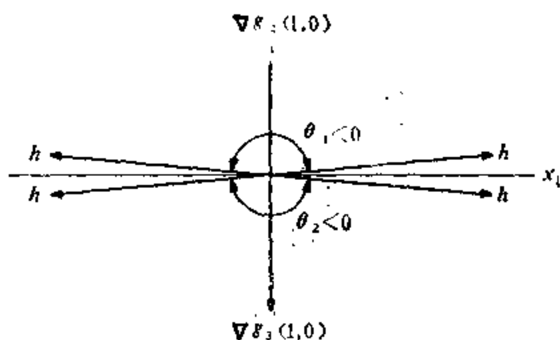


图 4-2

因为在点 $x^*=[1,0]^T$，$g_2(x_1,x_2)\geqslant 0$ 和 $g_3(x_1,x_2)\geqslant 0$ 成为等式。所以 Lagrange 乘子的存在要求 Jacobi 矩阵在这点的秩为最大(即秩为 2)。但是

$$J(1,\ 0)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial g_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_3}{\partial x_2}\end{bmatrix}_{1,0}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

其秩为1。所以，果然如此预料的，Lagragh乘子不存在。

例 4-6 对于例4-5，确定不满足约束规格，对于Kuhn-Tucker必要条件的成立，所造成的影响。

〔**解**〕 作Lagrange函数

$$L(x,\ \lambda)=(x_1-2)^2+x_2^2+\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+$$
$$+\lambda_3[(1-x_1)^3-x_2]$$

必要条件是

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=2(x_1-2)+\lambda_1-3(1-x_1)^2\lambda_3=0 \qquad (4.26)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=2x_2+\lambda_2-\lambda_3=0 \qquad (4.27)$$

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ (1-x_1)^2-x_2\geqslant 0 \qquad (4.28)$$

$$\lambda_1 x_1=0,\ \lambda_2 x_2=0,\ \lambda_3[(1-x_1)^2-x_2]=0 \qquad (4.29)$$

$$\lambda_i\leqslant 0,\qquad i=1,\ 2,\ 3 \qquad (4.30)$$

在 $\mathbf{x}^*=(1,\ 0)$处，式(4.25)得出

$$\lambda_1=2$$

但从(4.29)得出

$$\lambda_1=0$$

这导致矛盾，所以在极小点不满足Kuhn-Tucker条件。

三、鞍点条件

Kuhn-Tucker驻点条件有两个缺点。(1) 对于非凸的

$f(\mathbf{x})$和 $g_i(\mathbf{x})$，它仅是必要条件。(2) 只有函数 $f(\mathbf{x})$和 $g_i(\mathbf{x})$为可微时才适用。

如第三章所证明，$(\mathbf{x}^*,\lambda^*)$是 Lagrange 函数的鞍点，Kuhn-Tucker 驻点条件也可以用 $L(\mathbf{x},\lambda)$的鞍点性质来表达。

定理 4-1 点$(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$，$\lambda^* \geqslant 0$ 是原问题（见下）的 Lagrange 函数 $L(\mathbf{x}, \lambda)$的鞍点，当且仅当

1. $\mathbf{x}^*$使 $L(\mathbf{x}, \lambda^*)$的关于所有 $\mathbf{x}$ 取极小。
2. $g_i(\mathbf{x}^*) \leqslant 0$, $\quad i=1, 2, \cdots, r$
3. $\lambda_i^* g_i(\mathbf{x}^*)=0$, $i=1, 2, \cdots, r$

原问题定义作

$$\min_{\mathbf{x}} \quad f(\mathbf{x})$$

且使 $g_i(\mathbf{x}) \leqslant 0$, $i=1, 2, \cdots, r$

其中 $\mathbf{x}=[x_1, x_2, \cdots, x_n]$，$f(x)$和 $g_i(x)$是实值函数。这里对这些函数没有可微性和凸性的要求。注意到上面的条件 1 是要求 $\mathbf{x}^*$是 Lagrange 函数的**全局**极小，而不是是局部极小。该定理将在习题 4-11 中给出证明。

为了建立确定 Lagrange 函数的鞍点和原非线性规划问题二者之间的联系，需要下面的定理。

定理 4-2 如果点$(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$是与原问题相联的Lagrange 函数的鞍点，则 $\mathbf{x}^*$是原问题的解。

该定理将在习题 4-12 中给以证明。

如果 $g_i(\mathbf{x})$是凸的，又至少存在一个 $\mathbf{x}$ 严格地满足所有不等式(也就是 $g_i(\mathbf{x})<0$, $i=1, 2, \cdots, r$)，那么鞍点条件(定理 4-2)既是必要的也是充分的，加于 $\mathbf{x}$ 的这一要求也是约束规格的一种形式。

这两个定理的主要优点，是给出了求解不可微非凸最优化问题的充分条件。由此产生的计算问题是对所有x求$L(x, \lambda^*)$的全局极小值。有许多直接搜索法可以用来完成这一任务。当然，这一求最小值问题的困难是它要求知道λ^*，而λ^*一般是不能事先知道的。这一鞍点关系，将构成在第十三章中所讨论的Lagrange分解和一个计算算法的基础。

四、对　　偶

对偶概念在线性规划中是十分完善的，且由此导出几个很有效的线性规划的计算算法。对线性规划及其对偶定理的简单介绍将在附录中给出。

非线性规划问题也有类似的对偶理论。但是，对偶非线性规划通常比相应的原问题难解得多。若与出现在原问题中的条件结合起来，对偶却也常常引导出计算上很有效的算法。这些内容将在第十三章中进一步讨论。

在非线性规划中我们定义**对偶函数**为

$$h(\lambda)=\min_{x} L(x, \lambda)$$

其中$L(x, \lambda)$的极小化是将λ作为固定参数而对所有的x进行的。我们注意到极小点x或许不满足约束$g_i(x)\leqslant 0$，$i=1, 2, \cdots, r$，并且事实上，极小值或许不是对参数λ的所有值都存在。现在定义λ的集合，使$L(x, \lambda)$关于x有有限的极小值。即

$$D=\left\{\lambda | h(\lambda)\text{存在且}\lambda\geqslant 0\right\}$$

在定理4-1中我们记得$L(x, \lambda^*)$的极小点为x^*，现在探讨如何利用$h(\lambda)$来确定λ^*。

定理 4-3 对于所有的满足 $g_i(\mathbf{x})\leqslant 0$, $i=1, 2, \cdots, r$ 的 $\mathbf{x}$，以及所有的 $\boldsymbol{\lambda}\in D$，对偶函数 $h(\boldsymbol{\lambda})\leqslant f(\mathbf{x})$。也就是说对偶函数给出了函数 $f(\mathbf{x})$的下界。

证明：由定义知

$$h(\boldsymbol{\lambda})=\min_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})\leqslant L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$$

或
$$h(\boldsymbol{\lambda})\leqslant f(\mathbf{x})+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i g_i(\mathbf{x})$$

根据假设，$\mathbf{x}$ 满足 $g_i(\mathbf{x})\leqslant 0$, $i=1, 2, \cdots, r$ 和 $\boldsymbol{\lambda}\geqslant 0$，那末

$$\sum_{i=1}^{r}\lambda_i g_i(\mathbf{x})\leqslant 0$$

同时
$$h(\boldsymbol{\lambda})\leqslant f(\mathbf{x}) \quad \boldsymbol{\lambda}\in D$$

$$\text{并且 } \mathbf{x}\in\left\{\mathbf{x}\middle| g_i(\mathbf{x})\leqslant 0, \ i=1, 2, \cdots, r\right\}$$

（证毕）

因为对偶函数给出 $f(\mathbf{x})$的下界，所以最大下界必定是 $h(\boldsymbol{\lambda})$在 $\boldsymbol{\lambda}\in D$ 的最大值。现在定义对偶问题为

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}\in D} h(\boldsymbol{\lambda})$$

定理 4-4(对偶定理) 点$(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$是下面定义的Lagrange函数的鞍点，当且仅当

1. $\mathbf{x}^*$是原问题的解。
2. $\boldsymbol{\lambda}^*$是对偶问题的解。
3. $f(\mathbf{x}^*)=h(\boldsymbol{\lambda}^*)$

定义下列术语：

原问题：

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

且使 $g_i(\mathbf{x})\leqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ r$

$$\mathbf{x}=[x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n]^T$$

且 $f(\mathbf{x})$，$g_i(\mathbf{x})$是实值函数。

Lagrange 函数：

$$L(\mathbf{x},\ \lambda)=f(\mathbf{x})+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i g_i(\mathbf{x})$$

对偶函数：

$$h(\lambda)=\min_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x},\ \lambda)$$

$$D=\left\{\lambda \mid h(\lambda)\text{存在，且 }\lambda\geqslant 0\right\}$$

对偶问题

$$\max_{\lambda\in D}\ h(\lambda)$$

这一重要定理在习题 4-15 中给以证明。

下列定理关于对偶函数的性质给出了某些说明，这对于设计计算算法是有帮助的。

定理 4-5 对偶函数 $h(\lambda)$在它的定义域 D 的任何凸子集上都是凹的。

本定理的证明在习题 4-16 中给出。

在这一章中，给出了几个重要的理论结果，它们在解最优化问题中将是很有用的。这些结果或是必要的或是充分的，或者是充分必要的，它们依赖于函数 $f(\mathbf{x})$和 $g_i(\mathbf{x})$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ r$的性质。为了方便读者，将这些条件（关于源问题的）总括在表 4-1 中。

原问题条件一览表　　表4-1

f(x), g(x) 可微性	f(x), g(x) 凸性	驻点条件	鞍点条件	对偶条件
可微	凸	必要且充分	必要且充分	必要且充分
可微	不要求	仅必要	仅充分	仅充分
不要求	凸	不能应用	必要且充分（约束规格成立）	必要且充分
不要求	不要求	不能应用	仅充分	仅充分

习题与题解

Kuhn-Tucker 定理

4-1 不用Kuhn-Tucker 条件，确定下列问题极小的必要条件。问题

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

且使 $x_i \geqslant 0$，$i=1, 2, \cdots, n$

〔**解**〕 回忆在第二章中古典必要条件的推导，我们在点 $\mathbf{x}^*$ 将 $f(\mathbf{x})$ 展成 Taylor 级数，

$$f(\mathbf{x}+h\Delta\mathbf{x})=f(\mathbf{x}^*)+h\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)\Delta\mathbf{x}$$

$$+\frac{1}{2}h^2(\Delta\mathbf{x})^T\mathbf{H}(\mathbf{x}^*+\theta h\Delta\mathbf{x})\Delta\mathbf{x}$$

其中 $\mathbf{H}$ 为 Hesse 矩阵，且 $0<\theta<1$。

要使 $\mathbf{x}^*$ 是极小点，要求

$$f(\mathbf{x}^*)\leqslant f(\mathbf{x}^*+h\Delta\mathbf{x})$$

由此得出**基本不等式**

$$h\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)\Delta\mathbf{x}+\frac{h^2}{2}(\Delta\mathbf{x})^T\mathbf{H}(\mathbf{x}^*+\theta h\Delta\mathbf{x})\Delta\mathbf{x}\geqslant 0$$

这是 $\mathbf{x}^*$为局部极小的必要条件。如果 $\mathbf{x}^*$是内点，即 $\mathbf{x}^*>\mathbf{0}$，那么由基本不等式即可导出一阶必要条件

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*)=0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

这就是第二章中得出的结果。但现在假设某个变量 x_j 的最优值在边界上，即 $x_j^*=0$。那么设其他各部分均为零，则基本不等式变为

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*)\Delta x_j\geqslant 0$$

但因为 $x_j^*=0$，Δx_j 必须是正的，由此得到必要条件：当 x_j^*在约束边界 $x_j^*=0$ 上，则

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*)\geqslant 0$$

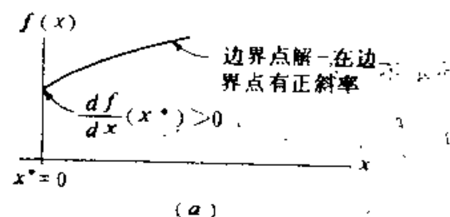
因为在最优点为内点时，所有导数都为零，故可以写成

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*)x_j^*=0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

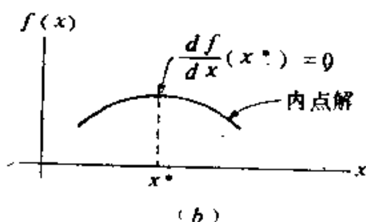
综合所得的必要条件，并写成紧凑的形式，即得

1. $\nabla f(\mathbf{x}^*)\geqslant 0$
2. $(\mathbf{x}^*)^T\nabla f(\mathbf{x}^*)=0$
3. $\mathbf{x}^*\geqslant \mathbf{0}$

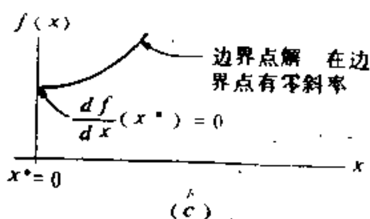
从图 4-3(a)我们看到，上述条件是合理的，因为当 $x_j^*=0$ 时，如果$\partial f(\mathbf{x}^*)/\partial x_j<0$，则可以移动到一个邻近的点 $x_j>0$，使 $f(\mathbf{x})$有更小的值，这时 $x_j^*=0$ 就不是最优的。为完整起见，另外两种可能的情形表示在图 4-3(b)、(c)中。



(a)



(b)



(c)

图 4-3

4-2　证明 Kuhn-Tucker 驻点条件(4.5)-(4.8)

〔解〕 对于问题

$$\max_{x} f(x)$$

且使 $g_i(x)\leqslant 0$, $i=1, 2, \cdots, r$

我们首先通过附加松弛变量 $s_i\geqslant 0$, 将不等式约束变为等式约束。于是有

$$s_i+g_i(x)=0 \qquad i=1, 2, \cdots, r$$

$$s_i \geqslant 0$$

现在作 Lagrange 函数

$$L(\mathbf{x},\ \mathbf{s},\ \boldsymbol{\lambda})=f(\mathbf{x})+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i[s_i+g_i(\mathbf{x})]$$

把第三章中的必要条件应用于 $\mathbf{x}$，$\boldsymbol{\lambda}$，并把习题 4-1 中建立的必要条件应用于非负性约束 s_i 上，可得如下结果

从第三章可得：

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*,\ \mathbf{s}^*,\ \boldsymbol{\lambda}^*)=\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*)+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^*\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*)=0$$

$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(\mathbf{x}^*,\ \mathbf{s}^*,\ \boldsymbol{\lambda}^*)=s_i^*+g_i(\mathbf{x}^*)=0$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ r$$

从问题 4-1 可得：

$$\frac{\partial L}{\partial s_i}(\mathbf{x}^*,\ \mathbf{s}^*,\ \boldsymbol{\lambda}^*)=\lambda_i^*\geqslant 0,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ r$$

$$s_i^*\frac{\partial L}{\partial s_i}(\mathbf{x}^*,\ \mathbf{s}^*,\ \boldsymbol{\lambda}^*)=s_i^*\lambda_i^*=0,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ r$$

$$s_i^*\geqslant 0\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ r$$

在上述等式中消去 s_i^*，得到

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*)+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^*\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*)=0,\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

$$g_i(\mathbf{x}^*)\leqslant 0\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ r$$

$$\lambda_i^*g_i(\mathbf{x}^*)=0\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ r$$

$$\lambda_i^*\geqslant 0\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ r$$

这就是 Kuhn-Tucker 驻点条件(4.5)-(4.8)。

4-3 试对问题

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

且使 $g_i(\mathbf{x})\leqslant 0$ $\qquad i=1, 2, \cdots, r$

$x_j\geqslant 0$ $\qquad j=1, 2, \cdots, n$

建立一组 Kuhn-Tucker 条件。

〔解〕 定义 Lagrange 函数为

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})=f(\mathbf{x})+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i g_i(\mathbf{x})+\sum_{j=1}^{n}\mu_j x_j$$

并且从必要条件

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)=\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*)+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*)$$

$$+\mu_j^*=0 \quad j=1, 2, \cdots, n$$

$$\mu_j^* x_j^*=0 \qquad \mu_j^*\leqslant 0$$

中消去 μ^*，剩下的必要条件就不再是 μ^* 的函数。现在另行定义

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})=f(\mathbf{x})+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i g_i(\mathbf{x})$$

则上述条件可以写成

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)=-\mu_j^*\geqslant 0, \quad j=1, 2, \cdots, n$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)\, x_j^*=0$$

现在变量 μ_j^* 已从必要条件中消去，条件概括如下：

$$\nabla_x L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)\geqslant 0, \qquad \nabla_\lambda L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)\leqslant 0$$

$$(\mathbf{x}^*)^T\nabla_x L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)=0, \quad (\boldsymbol{\lambda}^*)^T\nabla_\lambda L(\mathbf{x}^*, \lambda^*)=0$$

$$\mathbf{x}^*\geqslant 0, \qquad \boldsymbol{\lambda}^*\geqslant 0$$

4-4 写出下列问题的所有驻点的必要条件。

问题

$$\min\{f(\mathbf{x})|\mathbf{x}\in S_1\cap S_2\cap S_3\}$$

其中

$S_1=(E^n)^+$

$S_2=\{x|w_i(x)=0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n_w\}$

$S_3=\{x|g_i(x)\leqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n_g\}$

〔解〕 x 是实 n 维向量，$f(x)$，$w_i(x)$和 $g_i(x)$ 是定义在 S_1 上的实值函数且处处可微。

定义

$$L(x,\ \lambda,\ \mu)=f(x)+\lambda^T w(x)+\mu^T g(x)$$

必要条件是

$$\nabla_x L(x^*,\ \lambda^*,\ \mu^*)\geqslant 0,\ g(x^*)\leqslant 0$$

$$x^*\geqslant 0,\qquad \mu^*\geqslant 0$$

$$(x^*)^T\nabla_x L(x^*,\ \lambda^*,\ \mu^*)=0,\ (\mu^*)^T g(x^*)=0$$

$$w(x^*)=0$$

4-5 使用 Kuhn-Tucker 驻点条件，求解问题

$$\min_x\{f(x)=(x_1-1)^2+(x_2-2)\}$$

且使 $x_2-x_1=1$

$x_1+x_2\leqslant 2$

$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0$

并对答案作图解检验。

〔解〕 必要条件如习题 4-4 中所述。

定义

$$L(x,\ \lambda,\ \mu)=(x_1-1)^2+(x_2-2)^2+\lambda(x_2-x_1-1)+\mu(x_1+x_2-2)$$

现在

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=2(x_1-1)-\lambda+\mu\geqslant 0 \qquad (4.31)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=2(x_2-2)+\lambda+\mu\geqslant 0 \qquad (4.32)$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \tag{4.33}$$

$$x_1[2(x_1-1)-\lambda+\mu]=0 \tag{4.34}$$

$$x_2[2(x_2-2)+\lambda+\mu]=0 \tag{4.35}$$

$$x_1+x_2-2 \leqslant 0 \tag{4.36}$$

$$\mu \geqslant 0 \tag{4.37}$$

$$\mu[x_1+x_2-2]=0 \tag{4.38}$$

$$x_2-x_1-1=0 \tag{4.39}$$

为了求解这些方程，先假定 $x_1 \neq 0$，$x_2 \neq 0$ 和 $\mu=0$，然后解(4.34)，(4.35)和(4.39)，即解

$$2(x_1-1)-\lambda=0$$

$$2(x_2-2)+\lambda=0$$

$$x_2-x_1-1=0$$

得到 $x_1^*=1$，$x_2^*=2$ 和 $\lambda^*=0$ 但这些解不满足不等式(4.36)，即

$$1+2-2 \leqslant 0 \quad \text{或} \quad 1 \leqslant 0$$

其次设 $\mu \neq 0$，并且将(4.34)，(4.35)，(4.38)和(4.39)联立求解

$$x_1+x_2-2=0$$

$$x_2-x_1-1=0$$

$$2(x_1-1)-\lambda+\mu=0$$

$$2(x_2-2)+\lambda+\mu=0$$

得出

$$x_1^*=\frac{1}{2},\quad x_2^*=\frac{3}{2},\ \mu^*=1,\ \lambda^*=0$$

和 $$f(x_1^*,\ x_2^*)=\frac{1}{2}$$

检查(4.33)和(4.37)，我们看出

$x_1^*\geqslant 0$，$x_2^*\geqslant 0$ 和 $\mu\geqslant 0$

因此所得是解。解和可行域表示在图 4-4 中。

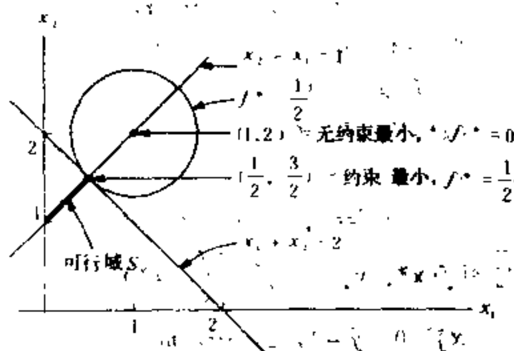


图 4-4

4-6 考虑曲线拟合问题，我们希望确定一组参数 $\mathbf{x}=[x_1, x_2, \cdots, x_m]$的值，使得我们的模型和观测数据的误差平方和为最小，即

$$\min \sum_{i}^{N}(\phi_i-p_i)^2 \tag{4.40}$$

其中

$\phi_i=f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i)$

$p_i=\phi_i$的第 i 次观测结果

$\mathbf{y}_i$是对每个观测所规定的 n 维向量。

从实际的理由知道 $x_j\geqslant 0$，$j=1, 2, \cdots, m$

(a) 给出Kuhn-Tucker 驻点条件。

(b) 对于本问题这些条件是必要的？还是充分的？还是充分必要的？为什么？

(c) 说明如何求解 Kuhn-Tucker条件以求得最优点x？

〔**解**〕 把 ϕ_i 代入(4.40)中引出非线性规划问题

$$\min_{\mathbf{x}}\left\{F(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{N}[f(\mathbf{x},\ \mathbf{y}_i)-p_i]^2\right\}$$

且使 $x_j \geqslant 0 \qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$

(a) 从问题 4-4 知道，必要条件为

$$\nabla_x F(\mathbf{x}^*) \geqslant 0$$

$$(\mathbf{x}^*)^T \nabla_x F(\mathbf{x}^*)=0$$

$$\mathbf{x}^* \geqslant 0$$

这样一来，对于每个 $j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$，有

$$\sum_{i=1}^{N} 2[f(\mathbf{x}^*,\ \mathbf{y}_i)-p_i]\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*)=0$$

$$x_j^* \geqslant 0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

或者有

$$\sum_{i=1}^{N} 2[f(\mathbf{x}^*,\ \mathbf{y}_i)-p_i]\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*)>0$$

$$x_j^*=0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

(b) 虽然目标函数作为 $f(\mathbf{x},\ \mathbf{y}_i)$ 的函数是凸的，但作为 $\mathbf{x}$ 的函数却不一定是凸的，除非对 $f(\mathbf{x},\mathbf{y}_i)$ 作某些规定。因此 Kuhn-Tucker 条件仅仅是**必要条件**。

(c) 下面给出一个求解这些方程的算法。其中方程

$$\sum_{i=1}^{N} 2[f(\mathbf{x},\ \mathbf{y}_i)-p_i]\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x})=0$$

以 I_j 代表算法为

1． 取 $x_j>0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$

2． 利用 Newton-Raphson 法或其他适当的算法，对所有使 $x_j^* \neq 0$ 的 j，求解方程 I_j。

3． 如果对所有的 j，$x_j^* \geqslant 0$，完成求解。

如果有某个 $x_k<0$，则令 $x_k^*=0$，并从联立方程组中去

掉 I_k，返回2。

虽然这一算法对于解这些方程指出了一个可行的方法，但不能保证对于任意的函数 $f(x, y_i)$都收敛。

4-7 解问题

$$\max \quad x$$

且使$(x^2-4)^2-25\leqslant 0$

〔**解**〕 定义

$$L=x+\lambda[(x^2-4)^2-25]$$

则驻点条件为

$$\frac{\partial L}{\partial x}=1+2\lambda(x^2-4)2x=0$$

$$(x^2-4)^2-25\leqslant 0$$

$$\lambda\leqslant 0$$

$$\lambda[(x^2-4)^2-25]=0$$

假定$\lambda<0$，从而得到解为

$$1+4\lambda x(x^2-4)=0 \qquad (4.41)$$

$$(x^2-4)^2-25=0 \qquad (4.42)$$

由方程(4.42)得到

$$x^2-4=\pm 5$$

$$x=\pm 3$$

代入式(4.41)中得到

$$\lambda^*=-\frac{1}{20x}\leqslant 0$$

所以

$$x^*=3 \text{ 和 } \lambda^*=-\frac{1}{60}$$

约束规格

4-8 证明：如果满足 Kuhn-Tucker 驻点条件和约束

规格，那么

$$(\nabla_x f(\mathbf{x}^*),\ \mathbf{h})\geqslant 0$$

〔证〕 对问题

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

且使 $g_i(\mathbf{x})\leqslant 0$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ r$

若令

$$L(\mathbf{x},\ \lambda)=f(\mathbf{x})+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i g_i(\mathbf{x})$$

则

$$\nabla_x L(\mathbf{x}^*,\lambda^*)=\nabla_x f(\mathbf{x}^*)+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^*\nabla_x g_i(\mathbf{x}^*)=0$$

只考虑紧约束(因为否则有 $\lambda_i^*=0$)，并作内积

$$(\nabla_x L(\mathbf{x}^*,\ \lambda^*),\ \mathbf{h})$$

或 $$(\nabla_x f(\mathbf{x}^*),\ \mathbf{h})+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^*(\nabla_x g_i(\mathbf{x}^*),\ \mathbf{h})=0$$

那么 $$(\nabla_x f(\mathbf{x}^*),\ \mathbf{h})=-\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^*(\nabla_x g_i(\mathbf{x}^*),\ \mathbf{h})$$

但 $\lambda_i^*\geqslant 0$

而由约束规格知

$$(\nabla_x g_i(\mathbf{x}^*),\ \mathbf{h})<0$$

所以

$$(\nabla_x f(\mathbf{x}^*),\ \mathbf{h})\geqslant 0$$

4-9 证明在下列问题的最优点上约束规格不满足。问题为

$$\max\quad x_1$$

且使 $g^1(x_1,\ x_2)=(x_2-2)+(x_1-1)^3\leqslant 0$

$g_2(x_1,\ x_2)=(x_1-1)^3-(x_2-2)\leqslant 0$

$x_1\geqslant 0,\qquad x_2\geqslant 0$

〔证〕从图 4-5 看出，解是(1, 2)，并且

$$\nabla_x g_1(1,2)=\begin{bmatrix}3(x_1-1)^2\\1\end{bmatrix}_{1,2}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$\nabla_x g_2(1,2)=\begin{bmatrix}3(x_1-1)^2\\-1\end{bmatrix}_{1,2}=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$$

约束规格要求

$$[0,\ 1]\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}<0 \quad 与 \quad [0,-1]\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}<0$$

或 $$h_2<0 与 -h_2<0$$

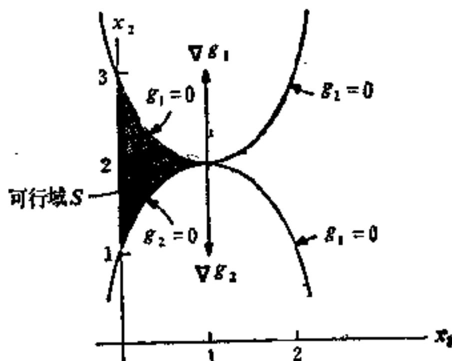


图 4-5

这显然是不可能的，所以约束规格不成立，并知道驻点条件不成立。后者由读者自行验证。

4-10 对下列问题检查约束规格和问题 4-8 的不等式是否成立。问题

$$\min \quad x_1$$

且使 $g_1(x_1,\ x_2)=x_2-(x_1-2)\leqslant 0$

$$g_2(x_1, x_2) = -x_2 - (x_1 - 2) \leqslant 0$$

〔**解**〕 从图 4-6 我们看到最优解是(2, 0)，并且

$$\nabla_x g_1(2,0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla_x g_2(2,0) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla_x f(2, 0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

为了满足约束规格，必须有

$$\|\nabla_x g_1\| \, \|\mathbf{h}\| \cos\theta_1 < 0$$

与

$$\|\nabla_x g_2\| \, \|\mathbf{h}\| \cos\theta_2 < 0$$

也就是

$$90° < \theta_1 < -90°$$

$$90° < \theta_2 < -90°$$①

任何 h，严格在可行域 S 内部，都同时满足这两个条件，因此约束规格满足。现在

$$\|\nabla_x f\| \, \|\mathbf{h}\| \cos\zeta \geqslant 0$$

要求

$$-90° \leqslant \zeta \leqslant 90°$$

虽然每个严格在 S 内部的 h 也满足这个不等式。

鞍点条件

4-11 证明定理 4-1。

〔**证**〕 根据鞍点的定义

$$L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}) \leqslant L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \leqslant L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^*)$$

首先证明必要性，即如果$(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$是$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$的鞍点且

---

① 原文如此，意指 θ_2 在90°与270°之间——译者注。

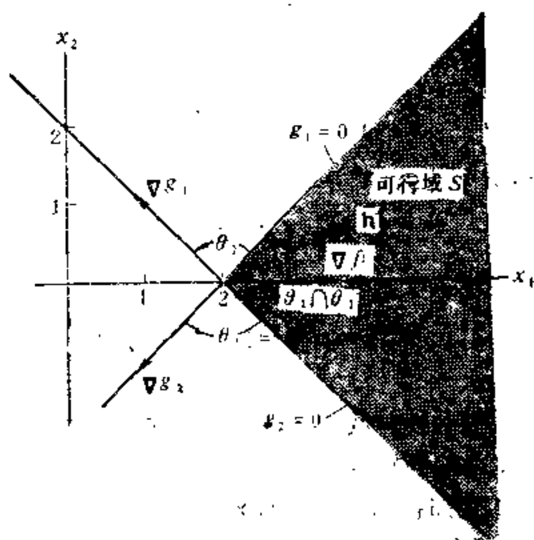


图 4-6

$\lambda^*\geqslant 0$，那么条件 1 至 3 成立。

由上述右边的不等式直接推出条件 1：

$\mathbf{x}^*$ 使 $L(\mathbf{x},\ \boldsymbol{\lambda}^*)$ 对所有 $\mathbf{x}$ 取极小。

展开左边不等式，得出对所有的 $\boldsymbol{\lambda}\geqslant 0$。

$$f(\mathbf{x}^*)+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i g_i(\mathbf{x}^*)\leqslant f(\mathbf{x}^*)+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^* g_i(\mathbf{x}^*)$$

或 $$\sum_{i=1}^{r}(\lambda_i-\lambda_i^*)g_i(\mathbf{x}^*)\leqslant 0$$

现在，如果有 $g_i(\mathbf{x}^*)$ 是正的，则可以选取相应的 λ_i 足够大，使上述不等式被破坏。因而条件 2 必须成立。即

$$g_i(\mathbf{x}^*)\leqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ r$$

因为上述不等式对 $\boldsymbol{\lambda}=0$ 必定成立，则得

$$-\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^* g_i(\mathbf{x}^*)\leqslant 0$$

或等价地

$$\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^* g_i(\mathbf{x}^*)\geqslant 0$$

但是由于 $\lambda_i^*\geqslant 0$ 和 $g_i(\mathbf{x}^*)\leqslant 0$ 有

$$\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^* g_i(\mathbf{x}^*)\leqslant 0$$

要同时满足这两个不等式，只有

$$\lambda_i^* g_i(\mathbf{x}^*)=0,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ r$$

这就是条件 3。

为了证明充分性，我们必须证明由这些条件推出的$(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$是 $L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$的鞍点。

由条件 1 立即得出对所有的 $\mathbf{x}$ 都有

$$L(\mathbf{x}^*,\ \boldsymbol{\lambda}^*)\leqslant L(\mathbf{x},\ \boldsymbol{\lambda}^*)$$

这是鞍点定义中的两个不等式之一，为了证明另一个不等式，可以把

$$L(\mathbf{x}^*,\ \boldsymbol{\lambda})=f(\mathbf{x}^*)+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i g_i(\mathbf{x}^*)$$

展开，然后从条件 2 和 $\lambda_i\geqslant 0$ 得出

$$\lambda_i g_i(\mathbf{x}^*)\leqslant 0$$

因此 $$L(\mathbf{x}^*,\ \boldsymbol{\lambda})\leqslant f(\mathbf{x}^*)$$

再由条件 3 有

$$f(\mathbf{x}^*)=L(\mathbf{x}^*,\ \boldsymbol{\lambda}^*)$$

所以，充分性得证。

4-12 证明定理 4-2。

〔**证**〕 如果$(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$是 Lagrange 函数的鞍点，则定理 4-1 成立，并且$\mathbf{x}^*$满足原问题的不等式约束。剩下只要

证明

$$f(\mathbf{x}^*)\leqslant f(\mathbf{x}),\ \text{对所有}\mathbf{x}$$

且使 $g_i(\mathbf{x})\leqslant 0$，$i=1, 2, \cdots, r$

从鞍点定义知，对一切 $\mathbf{x}$，有

$$f(\mathbf{x}^*)+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^* g_i(\mathbf{x}^*)\leqslant f(\mathbf{x})+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^* g_i(\mathbf{x})$$

由定理 4-1 的条件 3，不等式左边化为 $f(\mathbf{x}^*)$。现在对于满足 $g_i(\mathbf{x})\leqslant 0$ 的任意 $\mathbf{x}$，因为 $\lambda_i^*\geqslant 0$，$i=1, 2, \cdots, r$，所以有

$$\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^* g_i(\mathbf{x})\leqslant 0$$

于是不等式可以写成

$$f(\mathbf{x}^*)\leqslant f(\mathbf{x})$$

对所有使 $g_i(\mathbf{x})\leqslant 0$，$i=1, 2, \cdots, r$ 的 $\mathbf{x}$ 成立。

4-13 下列问题在点 $x=6$ 是否满足 Kuhn-Tucker 条件？这点是不是 Lagrange 函数的鞍点？问题为

$$\min_{x}\ (x-4)^2$$

且使 $1\leqslant x\leqslant 6$

〔解〕 将约束条件写成

$$g_1(x)=x-6\leqslant 0$$

$$g_2(x)=1-x\leqslant 0$$

则 $L(x, \lambda_1, \lambda_2)=(x-4)^2+\lambda_1(x-6)+\lambda_2(1-x)$

而驻点条件为

$$\frac{\partial L}{\partial x}=2(x-4)+\lambda_1-\lambda_2=0$$

$$x\leqslant 6,\qquad x\geqslant 1$$

$$\lambda_1\leqslant 0,\qquad \lambda_2\leqslant 0$$

$$\lambda_1(x-6)=0$$

$$\lambda_2(1-x)=0$$

在点 $x=6$ 处，我们有 $\lambda_1=-4$，$\lambda_2=0$ 且满足驻点条件。

现在考察 Lagrange函数在点(6，－4，0)的性质。固定(λ_1,λ_2)，关于 x 的 Hesse 矩阵是

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(6, -4, 0)=2>0$$

这意味着，关于 x，$L(6, -4, 0)$是极小值(而不是如要求的极大值)。

当原问题为求极大值时，其对偶函数定义作

$$h(\lambda)=\max L(x, \lambda)$$

因为 $L(x, \lambda_1, \lambda_2)$在(6，－4，0)点不具有极大值，所以对偶函数在这一驻点不存在，因此也不存在鞍点。

这样一来，在点 $x=6$ 满足驻点条件，但是Lagrange函数却不以此为鞍点。出现这种现象的原因在于我们所求的是一个凸函数的极小。驻点条件仅是局部极大的必要条件，在这里满足了；而鞍点条件是充分条件，这里并不满足。

4-14 对问题 4-5，证明

$$L(x_1^*, x_2^*, \lambda, \mu)\leqslant L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*, \mu^*)$$
$$\leqslant L(x_1, x_2, \lambda^*, \mu^*)$$

〔**证**〕 从问题 4-5 得到

$$L(x_1, x_2, \lambda, \mu)=(x_1-1)^2+(x_2-2)^2+\lambda(x_2-$$
$$-x_1-1)+\mu(x_1+x_2-2)$$

并且

$$x_1^*=\frac{1}{2},\quad x_2^*=\frac{3}{2},\ \lambda^*=0,\ \mu^*=1$$

那么

$$L(x_1^*,\ x_2^*,\ \lambda^*,\ \mu^*)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

且

$$L(x_1,\ x_2,\ \lambda^*,\mu^*)=(x_1-1)^2+(x_2-2)^2+x_1+ \\ +x_2-2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=2(x_1-1)+1=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=2(x_2-2)+1=0$$

因而 $\qquad x_1^*=\frac{1}{2},\quad x_2^*=\frac{3}{2}$

函数 $L(x_1,\ x_2,\ \lambda^*,\ \mu^*)$的 Hesse 矩阵是

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$$

这是正定矩阵，所以$\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$是 $L(x_1,\ x_2,\ \lambda^*,\ \mu^*)$的 绝对极小，且

$$L(x_1^*,\ x_2^*,\ \lambda^*,\ \mu^*)\leqslant L(x_1,\ x_2,\ \lambda^*,\ \mu^*)$$

现在定义对偶函数

$$h(\lambda,\ \mu)=\min_{x_i}\ L(x_1,\ x_2,\ \lambda,\ \mu)$$

我们有

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=2(x_1-1)-\lambda+\mu=0$$

因而得到

$$x_1=1+\frac{1}{2}(\lambda-\mu)$$

又 $\qquad \frac{\partial L}{\partial x_2}=2(x_2-1)+\lambda+\mu=0$

得到

$$x_2 = 2 - \frac{1}{2}(\lambda + \mu)$$

代入到 $L(x_1, x_2, \lambda, \mu)$，有

$$h(\lambda, \mu) = -\frac{1}{2}(\lambda^2 + \mu^2) + \mu$$

$$\frac{\partial h}{\partial \lambda} = -\lambda = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial \mu} = -\mu + 1 = 0$$

解得 $\lambda^* = 0$ 和 $\mu^* = 1$。$h(\lambda, \mu)$的 Hesse 矩阵是

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

因为$-\mathbf{H}$是正定的，所以 $\lambda^* = 0$，$\mu^* = 1$ 是$h(\lambda, \mu)$的极大。这样一来

$$h(\lambda, \mu) = L(x_1^*, x_2^*, \lambda, \mu)$$
$$\leqslant L(x_1, x_2, \lambda^*, \mu^*) = h(\lambda^*, \mu^*)$$

对偶

4-15 证明对偶定理(定理 4-4)。

〔证〕 为证明必要性，假设 $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$有一个鞍点($\mathbf{x}^*$, $\boldsymbol{\lambda}^*$)，那么由定理 4-1，$\mathbf{x}^*$ 是原问题的解，这就证明了条件 1。

由定义 $h(\boldsymbol{\lambda}) = \min\limits_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$，有

$$h(\boldsymbol{\lambda}^*) = f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^* g_i(\mathbf{x}^*)$$

但 $\lambda_i^* g_i(\mathbf{x}^*) = 0$，$i = 1, 2, \cdots, r$

由定理 4-1 得到

$$h(\boldsymbol{\lambda}^*) = f(\mathbf{x}^*)$$

因而条件 3 成立。现在由定义 4-3，有

$$h(\boldsymbol{\lambda}) \leqslant f(\mathbf{x}^*) = h(\boldsymbol{\lambda}^*), \text{ 对所有 } \boldsymbol{\lambda} \in D$$

因此 λ^* 使 $h(\lambda)$ 在 D 上取最大值，这就是条件 2 。必要性得证。

为证明充分性，必须证明条件 1 至 3 可推出 $L(x, \lambda)$ 有一个鞍点 (x^*, λ^*)，或者与之等价的定理 4-1 的条件 1 至 3 成立。

因为 x^* 是原问题的解，所以 $g_i(x^*)\leqslant 0$ 且 $\lambda_i^* g_i(x^*)=0$，$=1, 2, \cdots, r$。这就是定理 4-1 的条件 2 和 3 。又因为 λ^* 是对偶问题的解，所以 $\lambda_i^*\geqslant 0$，$i=1, 2, \cdots, r$。这是定理 4-1 中的一个假设。现在只剩下要证明条件 1 成立，也就是要证 x^* 使 $L(x^*, \lambda^*)$ 取极小。

为了证明这一点，我们先假设结论不成立，即假设存在某个 $\hat{x}\neq x^*$，使得

$$L(\hat{x}, \lambda^*)<L(x^*, \lambda^*)$$

由定义

$$h(\lambda^*)\leqslant L(\hat{x}, \lambda^*)=f(\hat{x})+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^* g_i(\hat{x})$$

$$<f(x^*)+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^* g_i(x^*)$$

但由假设，$h(\lambda^*)=f(x^*)$，所以

$$\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^* g_i(\lambda^*)>0$$

但是，因为 x^* 是原问题的解，所以 $\lambda_i^* g_i(x^*)=0$ 就得出矛盾。由此得到 $\hat{x}=x^*$，并且 x^* 使 $L(x, \lambda^*)$ 取极小，这就是定理 4-1 的条件 1 。故充分性得证。

4-16 证明定理 4-5

〔证〕 设 D^* 是 D 的凸子集，考虑 D^* 内的任意两点，比如说 λ^1、λ^2，那么在连接此二点的线段上的任意一点 λ 可

以写成

$$\lambda=\alpha\lambda^1+(1-\alpha)\lambda^2 \qquad 0\leqslant\alpha\leqslant 1$$

因为 D^* 是凸的，所以 $\lambda\in D^*$。

由定义

$$h(\lambda)=\min_x L(x,\ \lambda)$$

但 $L(x,\ \lambda)$ 关于 λ 是线性的，所以

$$h(\lambda)=\min_x[\alpha L(x,\ \lambda^1)+(1-\alpha)L(x,\ \lambda^2)],$$

$$0\leqslant\alpha\leqslant 1$$

但是，和的最小值总大于或等于各项的最小值的和，所以

$$\min_x[\alpha L(x,\ \lambda^1)+(1-\alpha)L(x,\ \lambda^2)]$$
$$\geqslant\alpha\min_x L(x,\ \lambda^1)+(1-\alpha)\min_x L(x,\ \lambda^2)$$

由此

$$h(\lambda)\geqslant\alpha h(\lambda^1)+(1-\alpha)h(\lambda^2)$$

这意味着 $h(\lambda)$ 是 D^* 上的凹函数。

4-17 解下列问题 P，并给出它的对偶问题 D。且验证 $\min P=\max D$。

P：$\min(-x^2-x^3)$，且使 $x^2\leqslant 1$。

〔解〕 因为此处约束意味着 $x\in[-1,\ 1]$，从图 4-7 容易用图解得到 $x^*=1$。现在作 Lagrange 函数

$$L(x,\ \lambda)=-x^2-x^3+\lambda(x^2-1)$$

驻点条件是

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-2x-3x^2+2\lambda x=0 \qquad (4.43)$$

$$x^2\leqslant 1$$

$$\lambda\geqslant 0$$

$$\lambda(x^2-1)=0$$

如果 $\lambda=0$,则 $x(-2-3x)=0$；因此,$x=-\frac{2}{3}$或 $x=0$。

如果$x=1$，则 $\lambda=\frac{5}{2}$。

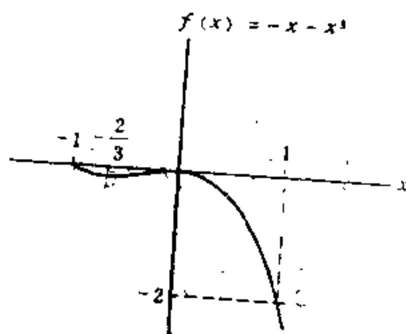


图 4-7

如果$x=-1$，则 $\lambda=-\frac{1}{2}$，不满足$\lambda\geqslant0$，因此有三个可能的解：

$$x=-\frac{2}{3},\ x=0,\ x=1$$

相应地有

$$L\left(-\frac{2}{3},\ 0\right)=\frac{-4}{27},\ L(0,\ 0)=0,\ L\left(1,\frac{5}{2}\right)=-2$$

所以 $x^*=1$ 是解，它使 $L(x,\ \lambda^*)$取极小，这与图解结果是一致的。

由(4.43)式可知，当 $x\neq0$ 时

$$x=\frac{2}{3}(\lambda-1)$$

代入 $L(x, \lambda)$中，得到

$$h(\lambda)=\frac{4}{27}\lambda^3-\frac{4}{9}\lambda^2-\frac{5}{9}\lambda-\frac{4}{27}$$

对偶问题是

$$\max\ h(\lambda)$$

且使　　$\lambda\geqslant 0$

这时

$$\frac{\partial h}{\partial \lambda}=\frac{4}{9}\lambda^2-\frac{8}{9}\lambda-\frac{5}{9}=0$$

由此解得

$$\lambda=-\frac{1}{2}\text{ 或 }\lambda=\frac{5}{2}.$$

只有正值满足约束条件，所以$\lambda^*=\frac{5}{2}$。于是

$$h\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{27}\left(\frac{125}{8}\right)-\frac{4}{9}\left(\frac{25}{4}\right)-\frac{5}{9}\left(\frac{5}{2}\right)-\frac{4}{27}=-2$$

且　$f(1)=-1^2-1^3=-2$

补 充 题

4-18　当原问题是

$$\min_{x_1, x_2}\ (x_1-1)^2+(x_2-2)^2$$

且使　　$x_2-x_1=1$

$x_1+x_2\leqslant 2$

$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0$

叙述其对偶问题，并证明 $f(x^*)=h(\lambda^*)$。

4-19　求原点到凸集

$$x_1+x_2 \geqslant 4$$

$$2x_1+x_2 \geqslant 5$$

的最小距离。图解之，并证明在极小点处驻点条件成立。

4-20 将 Kuhn-Tucker 理论用于线性规划问题

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

且使 $\mathbf{A}\mathbf{x} \geqslant \mathbf{b}$

$\mathbf{x} \geqslant 0$

4-21 写出问题 4-20 的 Lagrange 函数，并给出对偶问题。

4-22 研究在下述问题的最优点上Kuhn-Tucker 驻点条件是否成立？问题为

$$\max x$$

且使 $-x^2 \geqslant 0$。

4-23 证明问题 4-22 的最优点不是 Lagrange 函数的鞍点，并说明为什么出现这种现象。

4-24 下列问题是否满足 Kuhn-Tucker条件？

$$\min_{x_1, x_2} (x_1-3)^2+x_2$$

且使 $-x_1+(x_2-1)^2 \geqslant 0$

$x_1 \geqslant 0$，$x_2 \geqslant 0$。

4-25 在问题 4-24 中，约束规格是否满足？

4-26 使用 Kuhn-Tucker 理解下列问题

$$\max_{x_1, x_2} 25(x_1-2)^2+(x_2-2)^2$$

且使 $x_1+x_2 \geqslant 2$，$x_1-x_2 \geqslant -3$

$x_1+x_2 \leqslant 6$，$x_1-3x_2 \leqslant 2$

$x_1 \geqslant 0$，$x_2 \geqslant 0$

4-27 图解问题4-26。

4-28 试用驻点条件确定，参数 a_1 在什么范围 $x_1=4$、$x_2=3$ 是下列问题的最优解

$$\max_{x_1,\, x_2} \ a_1 x_1 + x_2$$

$$\text{且使} \quad x_1^2 + x_2^2 \leqslant 25$$

$$x_1 - x_2 \leqslant 1$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$$

4-29 用图解法证明问题 4-28 的结果。

4-30 求证：和的最小值大于或等于最小值的和。(提示：参看问题 4-16)。

第五章 一维搜索法

这一章我们讨论最简单的一类函数的求极小问题。设$f(x)$表示**一元**实变量x的实值函数，我们假设$f(x)$在区间$[a^0, b^0]$上的一点x^*处取得最小值，一维搜索问题就是要建立算法寻找x^*点，使得经过n次迭代后，将初始区间缩小为一个包含x^*的较小的区间$[a^n, b^n]$。于是$[a^n, b^n] \subset [a^0, b^0]$且$x^* \in [a^n, b^n]$。包含$x^*$的区间$[a^n, b^n]$称为$n$次迭代后所得的**不确定区间**(*interval of uncertainty*)，并且用L_n表示。

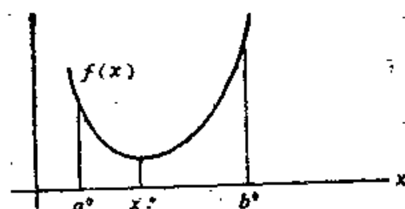
对于这类问题，函数$f(x)$的形式可以是未知的。因此这里讨论的算法只要求在区间$[a, b]$一点一点地计算$f(x)$的值，为了比较各种不同方法的效果，我们特别感兴趣的是将不确定区间缩减到规定程度时所需的函数值计算次数或试验次数。具体说，就是要寻找能最有效地利用这些试验的搜索方法。

我们应注意，这些试验仅由函数求值组成，特别是不需要计算函数$f(x)$的导数。但是，这些算法仅限于函数在$[a^0, b^0]$上是单峰时才可采用。

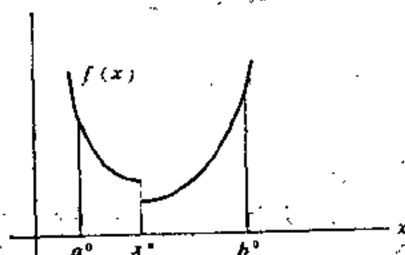
一、单峰函数

假设$f(x)$在不确定区间内有最小值，如果对于任意的$x \in [a^0, b^0]$，$f(x)$随x趋向于x^*而减小，则称$f(x)$在

$[a^0, b^0]$上是**单峰的**(*unimodal*)。简单地说，只有一个局部极小的函数是单峰函数。在图 5-1中给出在区间$[a^0, b^0]$上单峰函数的两个例子。注意我们没有要求函数$f(x)$的连续性和可微性。



(a)



(b)

图 5-1

引理 5-1 设$f(x)$在$[a^0, b^0]$上是单峰的，并且在$x^*\in[a^0, b^0]$取到最小值，那么为了得到$[a^0, b^0]$的含x^*的子区间，需要在区间$[a^0, b^0]$中至少对$f(x)$求值两次。

证明 选取x_1使$a^0<x_1<b^0$，并且计算$f(x_1)$(见图 5-2)，那么或者$x^*\in[a^0, x_1]$，或者$x^*\in[x_1, b^0]$。这时再选$x_2>x_1$，并且计算$f(x_2)$。如果$f(x_2)>f(x_1)$，则$x^*\in[a^0, x_2]$，否则$x^*\in[x_1, b_0]$。

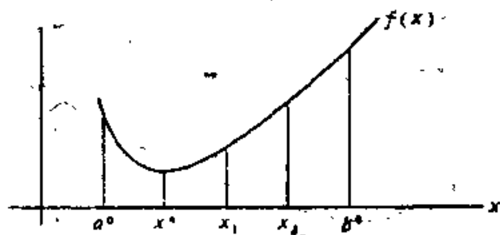


图 5-2

二、对分搜索

对分搜索(*dichotomous search*)算法是缩减含 x^* 的不确定区间长度的最简单的算法。设 c^n 是区间$[a^n, b^n]$的中点，即 $c^n=(a^n+b^n)/2$；这时选一个小正数 $\varepsilon>0$，并且令 $x_1^n=c^n-(\varepsilon/2)$，$x_2^n=c^n+(\varepsilon/2)$。如果 $f(x_2^n)>f(x_1^n)$，则按引理 5-1，应取 $a^{n+1}=a^n$ 及 $b^{n+1}=x_2^n=c^n+(\varepsilon/2)$，如图 5-3 中所示；否则 $a^{n+1}=x_1^n=c^n-(\varepsilon/2)$，$b^{n+1}=b^n$。在理论上，$\varepsilon$ 可以选作使 $f(x)$和 $f(x+\varepsilon)$为可区别的最小正数。显然，在每次迭代中，不确定区间的长度按接近于 0.5 的因子而缩短。对这一缩短的更详细的分析在例题5-1 中给出。

例 5-1　用对分搜索法对函数$f(x)=8x^3-2x^2-7x+3$ 作两次迭代，定出[0, 1]上最小值的存在范围。

[**解**]　用解析法可以验证，在区间[−1, 1]上$f(x)$在点 $x=-0.464$ 有最大值 5，在点 $x=0.63$ 取最小值 −0.2。$f(x)$的图形见图 5-4。

任取 $\varepsilon=0.1$并令$a^0=0$，$b^0=1$，那么 $c^0=0.5$，$x_1^0=0.45$

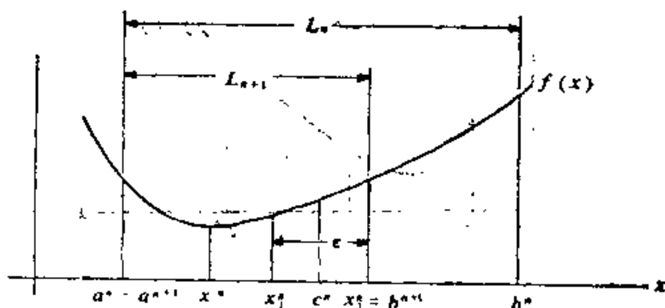


图 5-3

和 $x_2^0=0.55$。直接计算得出，$f(0.45)=0.52$ 及 $f(0.55)=-0.124$。因为 $f(x_1^0)>f(x_2^0)$，我们令 $a^1=x_1^0=0.45$，$b^1=b^0=1$。这时 $c^1=0.725$，$x_1^1=0.675$，$x_2^1=0.775$。再直接计算 $f(0.675)=-0.17$ 和 $f(0.775)=0.076$。因为 $f(x_2^1)>f(x_1^1)$，取 $a^2=a^1=0.45$ 和 $b^2=x_2^1=0.775$。

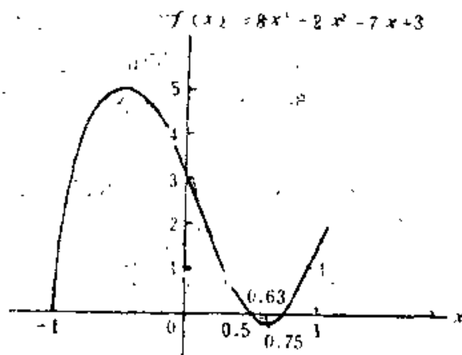


图 5-4

三、等间隔搜索

在对分搜索法中，我们选 x_1^n 和 x_2^n 对称于区间$[a^n, b^n]$的中间点。但是，这不是唯一可能的选择方法；事实上，x_1^n 和 x_2^n 在$[a^n, b^n]$中的选取完全是任意的。例如，我们可选取 x_1^n 和 x_2^n，将$[a^n, b^n]$分成三个等长的子区间，也可以在每次迭代中使用多于两个的点。这样就可以将$[a^n, b^n]$分成任意多个相等长度的子区间。当然，这样每次迭代中就要计算更多点上的函数值；而且通过在区间内适当地选点，可以减少求函数值的次数。在一次迭代中已计算出的函数值，在下一次迭代中也还可以使用，这就可以简化计算。在对分法里，因为在第$(n+1)$次迭代中不使用 $f(x_1^n)$和 $f(x_2^n)$的值，就没有上述优点。

作为最简单的等间隔搜索方案，我们选两个点 $x_2^n > x_1^n$，把$[a^n, b^n]$分割成三个等长的子区间，此方法叫做**两点等间隔搜索**（*two-point equal-interval*），图 5-5 表明了这一过程。其中 $x_1^n = a^n + (b^n - a^n)/3$，$x_2^n = b^n - (b^n - a^n)/3$。根据引理 5-1，$b^{n+1} = x_2^n$，$a^{n+1} = a^n$。注意，虽然 $x_1^n \in [a^{n+1}, b^{n+1}]$，但是在第 $n+1$ 次迭代中 $f(x_1^n)$却没有用处。这时，$b^{n+1} - a^{n+1} = 2(b^n - a^n)/3$。

为了更有效地利用已计算的函数值，考虑三点等间隔搜索方案，如图 5-6 所示。在图 5-6 中，我们选点 x_1^n、x_2^n 和x_3^n，把$[a^n, b^n]$分成四个等长的子区间，并且计算$f(x_1^n)$，$f(x_2^n)$和$f(x_3^n)$。我们保留一个子区间，它的中点对应于这三个函数值中的最小者。在图 5-6 中，$f(x_2^n) = \min[f(x_1^n), f(x_2^n), f(x_3^n)]$。因此，$a^{n+1} = x_1^n, b^{n+1} = x_3^n$。注意，$x_2^n \in [a^{n+1},$

b^{n+1}]，而且事实上是[a^{n+1}，b^{n+1}]的中点。因此在第 $n+1$ 次迭代中可以再次利用 $f(x^n)$。与两点法相比，函数值的使用次数增加了。这一算法将在问题 5-3 中作更详细的讨论。

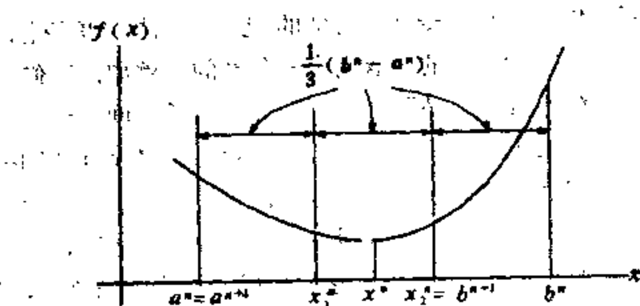


图 5-5

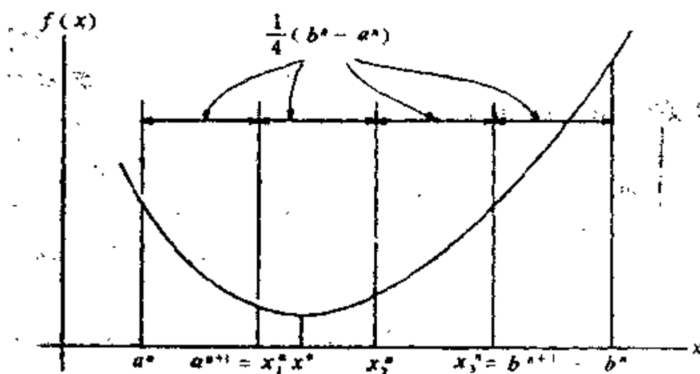


图 5-6

可以继续把[a^n，b^n]分成越来越多的等长子区间。但是可以证明，三点等间隔搜索方法，就函数值计算的有效使用而言是最好的。

例 5-2 对例 5-1 中在区间[0, 1]上给出的函数$f(x)$应用三点等间隔搜索方案作计算，并将结果同例 5-1 进行比较。

[解] 题中$a^0=0$，$b^0=1$。因此选$x_1^0=0.25$，$x_2^0=0.5$和$x_3^0=0.75$，直接计算得到$f(0.25)=1.24$，$f(0.5)=f(0.75)=0$。于是我们可以定$a^1=0.5$，$b^1=1$或者$a^1=0.25$，$b^1=0.75$，这两个区间都包含x^*。这时$b^1-a^1=0.50$，而在例 5-1 中是$b^1-a^1=1-0.45=0.55$。注意到$f(x)$是单峰的，并且$f(0.5)=f(0.75)<f(0.25)$，我们可以进一步缩小含x^*的区间的长度，如果取$a^1=0.5$，$b^1=0.75$，此时，$b^1-a^1=0.25$，而不是 0.5。但是在下一次迭代中就必须计算三次$f(x)$值。

例 5-3 用三点等间隔搜索法对函数$f(x)=e^x-5x$作两次迭代，在区间[1, 2]内找x^*。

[解] 因为$\frac{d^2f}{dx^2}=e^x>0$，$f(x)$在任意有限区间上都是严格凸的，所以是单峰的。事实上该函数在$x^*=\ln 5=1.609$达到最小值。

已知 $a^0=1$，$b^0=2$。选$x_1^0=1.25$，$x_2^0=1.5$和$x_3^0=1.75$。直接计算求出$f(1.25)=-2.75$，$f(1.5)=-3.0$和$f(1.75)=-2.96$。显然$f(1.5)=\min[f(1.25),f(1.5),f(1.75)]$。因此我们取$a^1=1.25$，$b^1=1.75$，那么$(b^1-a^1)/4=0.125$。再选$x_1^1=1.375$，$x_2^1=1.5$和$x_3^1=1.625$。我们已经计算过$f(x_2^1)=f(1.5)=-3.0$，至于其他的函数值，直接计算得到$f(1.375)=-2.95$，$f(1.625)=-3.03$，现在$f(1.625)=\min[f(1.375),f(1.5),f(1.625)]$，因此我们取$a^2=1.5$，和$b^2=1.75$。至此，我们可以继续迭代，或者取$[a^2, b^2]$的中点 1.625 作为$x^*$的近似值。

四、Fibonacci 搜索

到目前为止，我们讨论了三种不同的搜索法，它们在每次迭代中都要新计算函数值两次。按照引理 5-1，这是每次迭代中为缩小不确定区间的长度而需计算的函数值的最少次数。在对分法和两点等间隔法中，后面的迭代不使用前面迭代中求出的函数值。而三点等间隔法中有一个前已计算的函数值同新算的两个值一起使用。现在我们要寻求一种方法，它使用先前的一次求值，并且仅作一次新的求值，由此组成所要比较的两个值。这类方法中有一种叫做 **Fibonacci 搜索**。

假设我们希望安排 n 次试验，最小分离度是 ε，那么设 L_n 是经过 n 次试验后的不确定区间，并且使用对分搜索在区间 L_{n-1} 上，在与第$(n-1)$次试验对称并且距离为 ε 的点上安排第 n 次试验，如图 5-7 所示。在图上，叉号(×)表示旧的试验点。圆点(·)表示新的试验点，这样对称地配置试验点，每次只要新算一个函数值，可减少试验次数。从图 5-7 可见，L_n 和 L_{n-1} 之间的关系由下式给出

$$L_{n-1}=2L_n-\varepsilon \tag{5.1}$$

现在考虑当只剩下两次试验时，试验点的最优配置。从对分搜索的定义，图 5-7 中的×号必须是在区间 L_{n-2} 上(两试验点中)的极小。在图 5-8 中表示出了这种情况，由此直接得到关系式

$$L_{n-2}=L_{n-1}+L_n$$

类似的可以看到

$$L_{n-3}=L_{n-2}+L_{n-1}$$

或者，一般地

$$L_{n-k}=L_{n-(k-1)}+L_{n-(k-2)},\quad k=2,\ 3,\ \cdots,\ n \qquad (5.2)$$

利用(5.1)和(5.2)式，我们看到

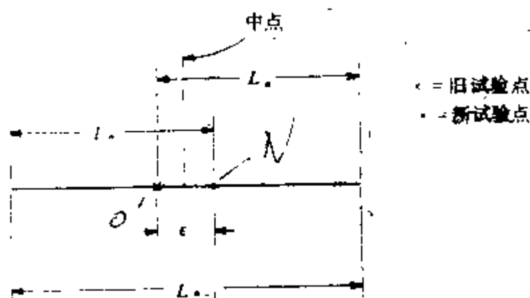


图 5-7

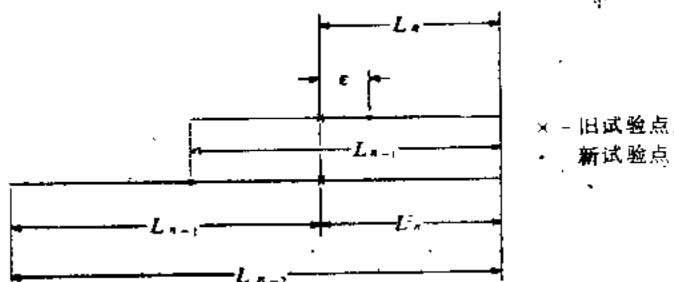


图 5-8

$$
\begin{aligned}
L_{n-2}&=L_{n-1}+L_n=3L_n-\varepsilon\\
L_{n-3}&=L_{n-2}+L_{n-1}=5L_n-2\varepsilon\\
L_{n-4}&=L_{n-3}+L_{n-2}=8L_n-3\varepsilon\\
L_{n-5}&=L_{n-4}+L_{n-3}=13L_n-5\varepsilon
\end{aligned}
\qquad (5.3)
$$

....

$$L_{n-k}=F_{k+1}L_n-F_{k-1}\varepsilon$$

在这一序列中，系数 F_K 具有如下性质

$$F_k=F_{k-1}+F_{k-2},\ k=2,\ 3,\ \cdots \tag{5.4}$$

其中 $F_0=F_1=1$。数列 F_k 被冠以意大利科学家 Fibonacci 的名字，称为 **Fibonacci 序列**。

例 5-4 1202 年意大利比萨的科学家 leonard(绰号 Fibonacci)，在估算野兔的繁殖数量时，偶然发现了一个整数序列。他假定野兔一个月发育成熟能够繁殖，以后每一个月产一对小兔。设 F_n 表示经 n 个月后野兔的对数，并设开始时是一对野兔，我们看到 $F_0=F_1=1$。两个月后，第一对产生了一对小兔，总数成为两对，所以 $F_2=2$。如此继续，$F_3=3$，$F_4=5$，$F_5=8$，$F_6=13$，并且 $F_k=F_{k-1}+F_{k-2}$，这就是方程(5.4)的 Fibonacci 序列。

［解］ 在(5.3)中令 $k=n-1$，得到

$$L_n=\frac{L_1+F_{n-2}\cdot\varepsilon}{F_n}. \tag{5.5}$$

它给出了初始区间 L_1 与经过 n 次试验后的末区间 L_n 之间的关系。因为头两次试验区间不缩小，所以 $L_0=L_1$。

类似地，对于 $k=n-2$，由式(5.2)得出

$$L_2=F_{n-1}L_n-F_{n-3}\varepsilon$$

或将(5.5)式代入，得出

$$L_2=\frac{F_{n-1}L_1}{F_n}+\frac{(F_{n-1}F_{n-2}-F_{n-3}F_n)\varepsilon}{F_n}$$

再将恒等式(5.4)代入上式，并利用 Fibonacci 序列的性质

$$F_{n-2}^2-F_{n-1}F_{n-3}=(-1)^n$$

得到

$$L_2=\frac{F_{n-1}L_1}{F_n}+\frac{(-1)^n\varepsilon}{F_n} \tag{5.6}$$

现在把 Fibonacci 算法概括如下：

1.确定初始的不确定区间

$$L_1=b^0-a^0$$

2.利用最小分离度 ε 和规定的试验点数 n，由式(5.6)计算 L_2。

3.从一端点(如 a^0)开始，取恰好 L_2 个单位，定出第一个试验点 a^1。

4.从另一端(如 b^0)取 L_2 个单位，确定出第二个试验点 b^1。

5.求 $f(a^1)$ 和 $f(b^1)$ 的值，如果 $f(a^1)<f(b^1)$ 删去区间 (b^1, b^0)，或者若 $f(a^1)>f(b^1)$ 则删去区间 (a^0, a^1)。

6.在余下区间上，对称地取下一次试验点，并继续执行第 5 步。

7.继续 n 次试验，最后一个试验点将恰好距已有的那个试验点 ε 个单位。理论上的最后不确定区间由式(5.5)给出。

例 5-5 对图 5-9(a)中的函数使用 Fibonacci 法，取 $n=4$，$\varepsilon=0$。

[**解**] 这里 $L_1=1$，$F_3=3$，$F_4=5$ 和 $L_2=0.8$，如图 5-9(b)所示。最后的不确定区间由式(5.5)给出。即

$$L_4=\frac{L_1}{F_4}=0.2$$

与其他的一维最优化方法相比，Fibonacci 法有下列优

点：

1.对于指定的试验次数，它是最优的搜索方法(也就是说，每次试验所得的区间，缩减量最大)。

2.不需要计算函数的梯度。

3.算法简单，且宜于在计算机上实现。

4.每次迭代只需要贮存四个取样点。

5.最后的不确定区间容易预先计算出来。

尽管有这些优点，该方法也有如下缺点：

1.必须预先确定搜索中的试验点数 n。

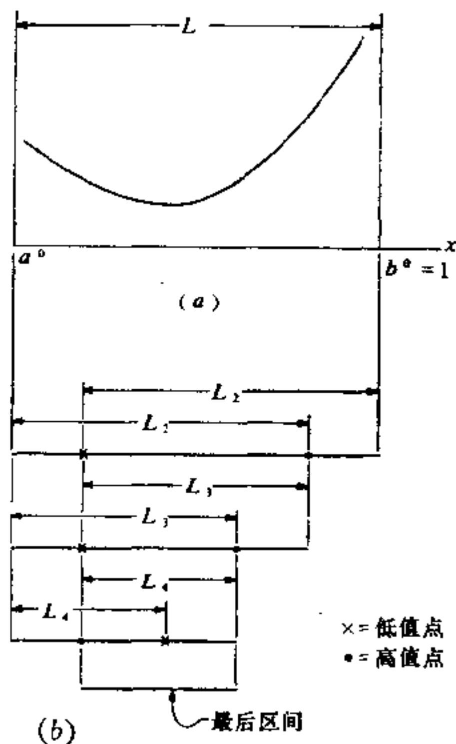


图 5-9

2. 必须指定最小分离度 ε。

下一节将会看到，假若允许损失某些计算效果，那么这些缺点都可以克服。

五、黄金分割搜索

假设我们要求**每一次迭代**的末尾和开始两个不确定区间长度之比保持常数。满足这一要求的算法称为**黄金分割算法**。如果令 λ 表示每次迭代末尾和开始区间的长度之比，那么对于第 n 次迭代，这一要求可写成

$$\frac{x_2^n-a^n}{b^n-a^n}=\frac{b^n-x_1^n}{b^n-a^n}=\lambda$$

这相应于在开始区间 $[a^n, b^n]$ 上，对称地取两点 x_1^n 和 x_2^n，距离 $x_2^n-a^n$ 和 $b^n-x_1^n$ 是相等的，都等于 $\lambda(b^n-a^n)$，如图5-10所示。从(5.7)式可知，由简单的代数演算，可以得到

$$\frac{x_1^n-a^n}{x_2^n-a^n}=\frac{1}{\lambda}-1 \tag{5.8}$$

从图 5-10 看出，$f(x_2^n)>f(x_1^n)$，所以我们令 $b^{n+1}=x_2^n$，$a^{n+1}=a^n$，并且选 $x_2^{n+1}=x_1^n$，现在，为了要使第 $(n+1)$ 次迭代满足(5.7)式，必须有

$$\lambda=\frac{x_2^{n+1}-a^{n+1}}{b^{n+1}-a^{n+1}}=\frac{b^{n+1}-x_1^{n+1}}{b^{n+1}-a^{n+1}} \tag{5.9}$$

上式通过代换，化简为

$$\lambda=\frac{x_1^n-a^n}{x_2^n-a^n} \tag{5.10}$$

将(5.8)、(5.9)式结合在一起，可通过解方程 $\lambda^2+\lambda-1=0$ 来确定 λ，取其正根 $\lambda=(\sqrt{5}-1)/2=0.618$，我们可以选 $x_1^{n+1}=a^{n+1}+(1-\lambda)(b^{n+1}-a^{n+1})$。

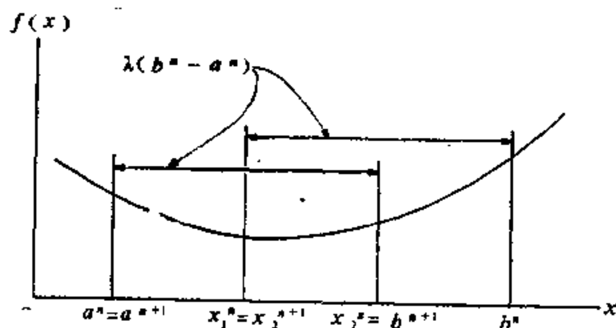


图 5-10

类似地，如果 $f(x_1^n)>f(x_2^n)$，则取 $b^{n+1}=b^n$，$a^{n+1}=x_1^n$，并且选 $x_1^{n+1}=x_2^n$，重复类似的论证，近似地得出 $\lambda=0.618$．因而 x_2^{n+1} 的正常选择由 $x_2^{n+1}=b^{n+1}-(1-\lambda)(b^{n+1}-a^{n+1})$ 给出。注意，或者 x_1^n 或者 x_2^n 连同其对应的函数值要用在第 $n+1$ 次迭代中。

例 5-6 应用黄金分割法，求 $f(x)=e^x-5x$ 在区间 [1，2] 上的极小值点位置，并且与例题 5-3 的结果相比较。

［**解**］ 例 5-3 使用了三点等间隔搜索方案，在计算五次函数值以后，我们得到 $\Delta L=0.25$。现在计算用黄金分割法求五次函数值后得到的结果 ΔL。因为已知 $a^0=1$ 和 $b^0=2$，使用黄金分割法中间点是 $x_1^0=1.382$ 和 $x_2^0=1.618$，由直接计算得到，$f(1.382)=-2.94$ 和 $f(1.618)=3.1$。因为 $f(x_1^0)>f(x_2^0)$，我们令 $a^1=x_1^0=1.382$ 和 $b^1=b^2=2$。

在第二次迭代中，取 $x_1^1=x_2^0=1.618$，并且计算 $x_2^1=2-(1-0.618)(2-1.382)=1.765$，由直接计算得到 $f(1.765)=-3.0$。因为 $f(x_2^1)>f(x_1^1)$，我们取 $a^2=a^1=1.382$ 和 $b^2=x_2^1=1.765$。

第三次迭代，我们取 $x_1^3=x_2^2=1.618$，且计算 $x_1^3=1.382+0.382(1.765-1.382)=1.527$。由直接计算 $f(1.527)=-2.0$ 可知，显然 $f(x_1^3)>f(x_2^3)$，所以我们取 $a^3=x_1^3=1.572$，$b^3=b^2=1.765$

第四次迭代，取 $x_1^3=x_2^3=1.618$，计算 $x_2^3=1.765-0.382(1.765-1.527)=1.674$。然后，由直接计算 $f(1.674)=-0.306$ 可知，显然 $f(x_2^3)>f(x_1^3)$，所以我们有 $a^4=a^3=1.527$ 与 $b^4=x_2^3=1.674$。现在我们已作了五次函数计算，并计算出 $\Delta L=\dfrac{(b^4-a^4)}{b^0-a^0}=0.147$。同例 5-3 中得到的 0.25 相比较，显然黄金分割法比三点等间隔搜索法优越。

例 5-7 黄金分割法是将单位区间分成两个不相等的部分，使得总长与大的那部分的长度之比，等于大的部分与小的部分之比。若 λ 表示大的部分，则有

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{\lambda}{1-\lambda}$$

由上式得 $\lambda^2+\lambda-1=0$

这一分割线段的方式是几何学家 Euclid 提出的，称为**黄金分割**。在古希腊的建筑中，广泛采用了这种比例关系。

例 5-8 用 L_n 表示经过安排 n 次试验以后的不确定区间，L_1 代表初始区间，对黄金分割法，我们看到用 D_n 表示安排过 n 次试验后的不确定区间与初始区间之比，我们有

n	0	2	3	4	......
Ln	L_1	λL_1	$\lambda^2 L_1$	$\lambda^3 L_1$	......

$$\frac{L_n}{L_{n-1}}=\lambda$$

并且

$$D_n=\frac{L_n}{L_1}=\lambda^{n-1} \tag{5.11}$$

例5-9 取 $n=11$，比较 Fibonacci 和黄金分割搜索的区间缩减效果。

对于 Fibonacci 法，设 $\varepsilon\approx 0$，从(5.5)式得到

$$\frac{L_{11}}{L_1}=\frac{1}{F_{11}}=\frac{1}{144}=0.006944$$

对于黄金分割搜索，由(5.11)式得到

$$\frac{L_{11}}{L_1}=\lambda^{10}=(0.618)^{10}=0.008130$$

于是，11 次试验以后，Fibonacci 法比黄金分割搜索得到更小的不确定区间，大约小 12%。

六、二次插值法

到目前为止，所讨论的搜索方案容易在计算机上编成程序。

在问题 5-1 和 5-2 中，从对分法和三点等间隔搜索法所做的计算可以看出，它们的收敛速度也很容易计算。对于黄金分割算法，我们证明了经过 n 次迭代后，末区间长度与初始区间长度之比是 λ^{n-1}，其中近似有 $\lambda=0.618$。这些方法的主要的缺点是，为以合理的精度求得 x^* 的位置，需要计算大量的函数值。

另一种求 x^* 的方法是用有限次多项式作 $f(x)$ 的近似函数，这时可以解析地确定多项式的极小点位置，同时把这个值作为 x^* 的估计值。虽然三次多项式的应用也很成功，

但二次多项式是最简单的近似函数。在讨论二次插值法以前，值得指出的是这个方法常用在更复杂的求极小问题上，例如，设 $\mathbf{x}$ 是 n 维向量，$f(\mathbf{x})$ 是 n 个变量的函数，那么求 $f(\mathbf{x})$ 极小点的很多算法都使用如下的一维搜索方案，有时称为**沿直线下降求极小**(*minimizing down the line*)。

设 $\mathbf{x}^0$ 是初始点，$\mathbf{v}$ 是在 $\mathbf{x}^0$ 点的下山方向，那么我们定义 $\mathbf{x}^1=\mathbf{x}^0+\lambda_1\mathbf{v}$，其中 λ_1 使 $f(\mathbf{x}^0+\lambda\mathbf{v})$ 关于 λ 取极小。当然，这后一个求极小的问题等价于标量函数 $g(\lambda)=f(\mathbf{x}^0+\lambda\mathbf{v})$ 关于 λ 求极小。因为 $\mathbf{v}$ 在 $\mathbf{x}^0$ 点是下山(*downhill*)方向，我们有 $\lambda\geqslant 0$。引入上界 m 以避免过大的步长。于是该一维搜索等价于对 $0\leqslant\lambda\leqslant m$，求 $g(\lambda)$ 的极小，这类方法在第六章将作进一步的讨论。

现在我们说明如何利用二次插值来简化这种一维搜索问题的求解。设向量 $\mathbf{v}$ 的长度是 1，现在计算 $g(1)$，如果 $g(1)>g(0)$，对 $\lambda=1/2,\ 1/4,\ 1/8,\ \cdots$ 计算 $g(\lambda)$，直到 $g(\lambda)<g(0)$ 为止，然后确定 $a=0$，$b=\lambda$ 和 $c=2\lambda$，并且按下式计算 $\hat{\lambda}$

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{2}\frac{g(a)(c^2-b^2)+g(b)(a^2-c^2)+g(c)(b^2-a^2)}{g(a)(c-b)+g(b)(a-c)+g(c)(b-a)} \tag{5.12}$$

这一表达式在习题 5-2 中导出。如果 $g(1)\leqslant g(0)$，那么对于 $\lambda=2,\ 4,\ 8,\ \cdots,\ a,\ b,\ c$ 计算 $g(\lambda)$，其中 c 表示满足 $g(c)>g(b)$ 的第一个点。然后再一次用式(5.12)计算 $\hat{\lambda}$，如果 $g(\hat{\lambda})<g(b)$，则接受 $\hat{\lambda}$ 作为 λ_1 的估值，其中 λ_1 是 $f(\mathbf{x}^0+\lambda\mathbf{v})$ 关于 λ 的极小，如果 $g(\hat{\lambda})\geqslant g(b)$，则接受 b 作为 λ_1 的估值。$g(1)>g(0)$ 和 $g(1)<g(0)$ 两种情况的二次

插值过程分别图示在图 5-11 和 5-12 中。

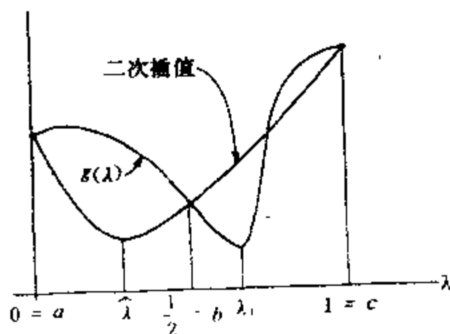


图 5-11

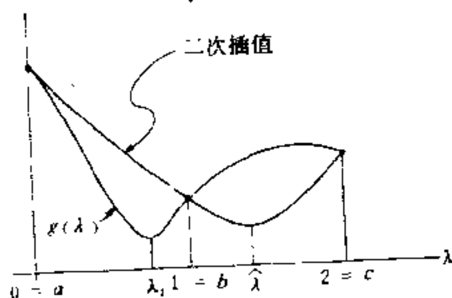


图 5-12

例 5-10 对函数 $g(\lambda)=8\lambda^3-2\lambda^2-7\lambda+3$，由(5.12)式找出$\hat{\lambda}$，并与例题 5-1 的结果作一比较。

[解] 注意到 $g(0)=3$ 和 $g(1)=2$，也就是 $g(1)<g(0)$，然后对 $\lambda=2$ 计算 $g(\lambda)$，得到 $g(2)=45$，因为 $g(2)>g(1)$，我们令 $a=0$，$b=1$ 和 $c=2$，然后由(5.12)式得到

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{2}\ \frac{3(4-1)+2(0-4)+45(1-0)}{3(2-1)+2(0-2)+45(1-0)}=0.52$$

从例题 5-1 知道，在[0, 1]上 $g(\lambda)$有一个极小，$\lambda^*=0.63$。因此$\hat{\lambda}=0.52$ 是 λ^* 的一个不好的估值，尽管它只需要求函数值三次，大多数其它的区间搜索法求函数值四次，将产生一个更好的 λ^* 估值。但是对于一个每次迭代都使用一维搜索法的优化算法，在初始阶段可能并不需要这样好的精度。

例 5-11 在区间[1, 2]用二次插值法找出 $f(x)=e^x-5x$ 的极小。

[**解**] 使用新的变数 $\lambda=x-1$，我们得到 $g(\lambda)=e^{\lambda+1}-5(\lambda+1)$，直接计算 $g(0)=-2.282$ 和 $g(1)=-2.611$。因为 $g(1)<g(0)$，我们计算 $g(2)=5.086$，现在 $g(2)>g(1)$，所以我们在(5.12)中令 $a=0$, $b=1$ 和 $c=2$ 得到

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{2}\ \frac{-2.282(4-1)+(-2.611)(-4)+5.086}{-2.282(2-1)+(-2.611)(-2)+5.086}$$

$$=0.531$$

λ^* 的精确解由 $\lambda^*=x^*-1=0.609$ 给出

七、穷举搜索

到目前为止，所讨论的区间搜索法本质上都是序贯的。这意味着，在第 $n+1$ 次迭代中，试验点的位置不能预先规定，而要取决于第 n 次迭代得到的不确定区间。可是，在某些其他的区间搜索方法中，所有试验点的位置可以事先指定。这样的方法之一是**穷举搜索**。在穷举法中，我们把原始的不确定区间$[a^0, b^0]$分成数目很大的一组相同长度的子区间。如图 5-13 所示。然后计算 $f(x)$在每个子区间端点上的值，并在函数值的这个有限集合中求出最小值。这一最小值

点就作为x^*的估计值。例如，在图 5-13 中，这个过程导致x_5作为x^*的估计值。从这个例子显然可见，子区间的长度必须取得足够小，才不致漏掉每个尖的和窄深的极小值。另一方面，小子区间造成函数值计算的总次数增加，因而算法的效率十分低，穷举搜索法对于在极值点附近平坦且相对光滑的函数是相当有效的。

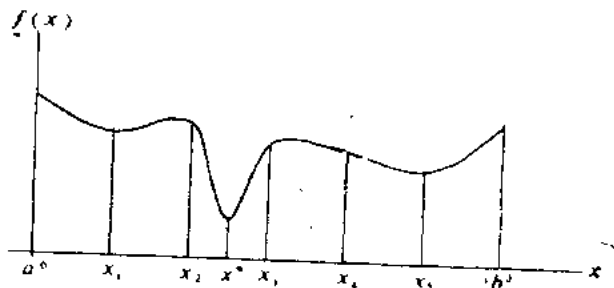


图 5-13

习题与题解

5-1 设D_n表示完成n次迭代以后，不确定区间的长度与包含点x^*的初始区间长度之比，则可以作为获得对分搜索法效率的一种量度。试给出D_n的方程。

［**解**］ 不失一般性，我们假定初始不确定区间的长度为1。这一标准化通过采用一个新的变量$y=(x-a^0)/(b^0-a^0)$很容易做到。用$L_n=b^n-a^n$表示经过n次迭代后的不确定区间长度，那么对于对分搜索法，有$2L_{n+1}=L_n+\varepsilon$(参看图5-3)。注意$L_0=1$，且对L_n利用上述方程，得到

$$L_n = \frac{1}{2^n} + \frac{\varepsilon}{2^n} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \frac{1}{2^n} + \frac{\varepsilon}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2^n} + \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

经过 n 次迭代后，有

$$D_n = L_n = \frac{1}{2^n} + \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \qquad (5.13)$$

因为每次迭代要求计算函数值两次，计算函数值的总次数 N 由 $N=2n$ 给出。注意当 $n\to\infty$ 时，$L_n\to\varepsilon$。换句话说，对于对分搜索，包含 x^* 的最后不确定区间的长度至少是 ε。

5-2 将习题 5-1 中的方程(5.13)同例题 5-1 的结果作比较。

［**解**］ 在例题 5-1 中，数值结果给出 $L_2=b^2-a^2=0.775-0.45=0.325$，利用方程(5.13)，也可得出 $L_2=\frac{1}{4}+0.1\left(1-\frac{1}{4}\right)=0.325$。

在习题 5-1 中我们看到用对分搜索算法最后不确定区间至少是 ε。从例题 5-1 可以看出，当 $\varepsilon=0.1$ 时，$L_2=0.325$。但是，如果在经过二次迭代后，用$[a^2, b^2]$的中点 c_2 近似最优点，我们看到 $c_2=0.6125$。因此在只经过二次迭代后的误差是 $x^*-c_2=0.63-0.6125=0.0175$，已经比 ε 小得多。这个例题指出，L_n 代表经过 n 次迭代后不确定区间的最坏的情况，而实际误差可能比这小得多，这个例子也指出了精心选取 ε 的重要性，因为在这种情况下，它限制了可得到的理论上的精度。

5-3 完成三点等间隔搜索的三次迭代，在区间 $0\leqslant x\leqslant 10$ 内求 $f(x)=x^2-4x+2$ 的极小。

［解］ 在区间[0, 10]上的三个等距离的点，求 $f(x)$ 的值得 $f(2.5)=-6.75$, $f(5.0)=-3.00$, $f(7.5)=13.25$. 保留区间[0, 5]，并在区间[0, 5]的三个等距离点求函数值，得到

$f(1.25)=-3.94$, $f(2.5)=-6.75$, $f(3.75)=-6.44$

保留区间[2.5, 5]，在区间[2.5, 5]的三个等距离点求函数值，得到

$f(3.125)=-6.98$, $f(3.75)=-6.44$, $f(4.335)=-5.11$

保留区间[2.5, 3.75]，于是经过由 9 次试验组成的三次迭代后，不确定区间缩小到它的初始值的 12.5%。

5-4 对于三点等间隔搜索算法，试找出为了获得规定的最后和初始不确定区间之比为 ΔL 时所需的函数，计算总次数的下界。

［解］ 设 $L_n=b^n-a^n$，则从图 5-6 看到，对于三点等间隔搜索法，$L_{n+1}=L_n/2$. 因此，取 $L_0=1$, $L_n/L_0=\left(\frac{1}{2}\right)^n$，同时为了满足 $L_n/L_0\leqslant\Delta L$ 必须有

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n\leqslant\Delta L \quad 或 \quad 2^n\geqslant\frac{1}{\Delta L}$$

因此

$$n\ln2\geqslant\ln(1/\Delta L)=-\ln\Delta L$$

且

$$n\geqslant-\frac{\ln\Delta L}{\ln2}=-1.441\ln\Delta L$$

在第一次迭代中，我们计算函数值三次。而在随后的所

有迭代中，每次迭代仅计算函数值两次。因此在 n 次迭代中计算函数值的总次数是 $3+2(n-1)$。于是，我们有

$$N\geqslant 1-2.882\ln \Delta L \tag{5.14}$$

5-5 将(5.14)式与例题 5-4 中得到的结果进行比较。

［解］ 从例题 5-4 可知，$\Delta L=(a^2-b^2)/(a^0-b^0)=0.25$。因此由(5.14)得到

$$N\geqslant 1-2.882\ln 0.25=5 \qquad (近似值)$$

同时利用计算函数值五次得到比率 $\Delta L=0.25$。这个结果与我们在例题 5-4 中得到的一致。

5-6 试求为获得 $L_n/L_1\leqslant 10^{-4}$，用Fibonacci 搜索法所需计算函数值的总次数。

［解］ 从(5.5)式中取 $e\approx 0$，有

$$\frac{L_n}{L_1}=\frac{1}{F_n}\leqslant 10^{-4}$$

因为 $F_{19}=6765$ 和 $F_{20}=10946$，我们看到需要计算函数值 20 次。

5-7 推导二次插值法中 $\hat{\lambda}$ 的方程(5.12)。

［解］ 首先假设 $g(\lambda)$的近似为二次型 $q(\lambda)=u_0+u_1\lambda+u_2\lambda^2$。对于极小点，$\dfrac{dq}{d\lambda}=0$ 且有 $\hat{\lambda}=-(u_1/u_2)/2$。此外如果 $u_2=\dfrac{1}{2}\dfrac{d^2q}{d\lambda^2}>0$，则 $q(\lambda)$在 $\hat{\lambda}$ 处取得极小，现在我们通过用 $q(\lambda)$近似 $g(\lambda)$来确定未知系数 u_0，u_1，u_2。选 λ 的三个值，用 a，b 和 c 表示，并令 $g(\lambda)$等于 $q(\lambda)$，有

$$g(a)=u_0+u_1a+u_2a^2 \tag{5.15a}$$

$$g(b)=u_0+u_1b+u_2b^2 \tag{5.15b}$$

$$g(c)=u_0+u_1c+u_2c^2 \tag{5.15c}$$

利用 Cramer 法则可以解出 u_1 和 u_2。

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$u_1=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}1 & g(a) & a^2\\ 1 & g(b) & b^2\\ 1 & g(c) & c^2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{g(a)(b^2-c^2)+g(b)(c^2-a^2)+g(c)(a^2-b^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$u_2=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}1 & a & g(a)\\ 1 & b & g(b)\\ 1 & c & g(c)\end{vmatrix}$$

$$=\frac{g(a)(c-b)+g(b)(a-c)+g(c)(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$\hat{\lambda}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{u_1}{u_2}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{g(a)(c^2-b^2)+g(b)(a^2-c^2)+g(c)(b^2-a^2)}{g(a)(c-b)+g(b)(a-c)+g(c)(b-a)}$$

5-8　对于方程(5.4)中的 F_k 试求一个封闭形式的解。

［解］　作为一个试探解，假设

$$F_k=Ap_1^k+Bp_2^k \tag{5.17}$$

其中 A, B, p_1 和 p_2 是要确定的未知量，将(5.17)代入(5.4)，得到

$$Ap_1^k+Bp_2^k=A(p_1^{k-1}+p_1^{k-2})+B(p_2^{k-1}+p_2^{k-2})$$

或　$A(p_1^k-p_1^{k-1}-p_1^{k-2})+B(p_2^k-p_2^{k-1}-p_2^{k-2})=0$

因此对任何 k, p_1 和 p_2 必须满足

$$p^2-p-1=0$$

由此

$$p_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.618,\quad p_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}=0.618$$

利用初始条件 $F_0=F_1=1$，得到 A 和 B，于是 $A+B=1$，$Ap_1+Bp_2=1$，所以

$$A=\frac{1-p_2}{p_1-p_2},\quad B=\frac{p_1-1}{p_1-p_2}$$

最后

$$F_k=\left(\frac{1-p_2}{p_1-p_2}\right)p_1^k+\left(\frac{p_1-1}{p_1-p_2}\right)p_2^k$$

但

$$1-p_2=1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=p_1$$

$$p_1-1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=-p_2$$

所以

$$F_k=\frac{1}{p_1-p_2}\left(p_1^{k+1}-p_2^{k+1}\right)$$

或者

$$F_k=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right]$$

5-9 证明黄金分割法和 Fibonacci 法有同样的渐近收敛速度。

［**解**］ 我们定义渐近收敛速度为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{L_{n-1}}$$

对于黄金分割法(见例题 5-8)

$$\frac{L_n}{L_{n-1}}=\lambda=0.618$$

对所有的n成立，对于Fibonacci法取$\varepsilon=0$有

$$\frac{L_n}{L_1}=\frac{1}{F_n} \text{ 和 } \frac{L_{n-1}}{L_1}=\frac{1}{F_{n-1}}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{L_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n-1}}{F_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{Ap_1^{n-1}+Bp_2^{n-2}}{Ap_1^n+Bp_2^n} \tag{5.18}$$

其中$p_1=1.618$，$p_2=-0.618$。

因为$|p_2|<1$，方程(5.18)要求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1^{n-1}}{p_1^n}=\frac{1}{p_1}=\frac{1}{1.618}=0.618$$

这同黄金分割法的渐近收敛速度相同。

5-10 使用Fibonacci法，求$f(x)=x^2-6x+2$在区间$0\leqslant x\leqslant 10$上的极小，以使最后区间长小于初始区间的3%。

[解] 为求得

$$\frac{L_n}{L_1}=\frac{1}{F_n}<3\%$$

需要八次试验，因为$1/F_8=\frac{1}{34}<0.03$。取$\varepsilon\approx 0$有

$$L_2=\frac{F_{n-1}L_1}{F_n}=\frac{21}{34}(10)=6.18$$

$$f(6.18)=3.112$$

$$f(10-6.18)=f(3.82)=6.328$$

因为$f(3.82)<f(6.18)$，抛弃区间[6.18, 10]，并对称地取下一个试验点在$6.18-3.82=2.36$处。此时，因为

$f(2.36)=-6.578<f(3.82)$，我们抛弃区间[3.82, 6.18]。并对称地在 3.82−2.36=1.46 处作下一次试验。然而因为 $f(1.46)=-4.659>f(2.36)$，故抛弃区间[0, 1.47]，在 3.82−2.36+1.47=2.93 处作下一次试验，由于 $f(2.93)=-6.996<f(1.47)$，所以抛弃[1.47, 2.36]，在 3.82−2.93+2.36=3.25 点作下一次试验，因为 $f(3.25)=-6.947>f(2.94)$，抛弃[3.25, 3.82]并在 3.25−2.94+2.36=2.67 点作下一次试验，又因为 $f(2.67)=-6.87>f(2.94)$，抛弃[2.36, 2.67]并在 3.25−2.94+2.67=2.98 点作最后试验，最后 $f(2.98)=-6.9<f(2.67)$，且它的不确定区间是[2.98, 3.257]小于初始区间的 3%，最小点实际上出现在 $x^*=3.0$ 处，正如所期望的那样，它包含在最后的区间中。

补充题

5-11 当 $f(x)$ 在 $[a^0, b^0]$ 上有一个极大值时，定义函数的单峰性。

5-12 证明 Fibonacci 序列，有 $F_{n-2}^2-F_{n-1}F_{n-3}=(-1)^n$。

5-13 导出(5.8)和(5.10)式。

5-14 对例题 5-10 绘出 $g(\lambda)$ 和它的二次插值草图。

5-15 对例题 5-11 绘出 $g(\lambda)$ 和它的二次插值草图。

5-16 对问题 5-10，像在图5-9(*b*)那样确定 Fibonacci 试验点。

5-17 应用 Fibonacci 搜索法，$n=6$，求 $f(x)=e^x-5x$ 在[1, 2]区间上的极小，将结果与例题 5-3，5-6 和 5-11的结果相比较。

5-18 为了满足 $\Delta L \leqslant 0.125$ 的要求，求使用

(1)三点等间隔搜索

(2)Fibonacci 搜索

时，所需计算函数值的最少次数。

5-19 用三次插值估计函数 $f(x)=x^4-2x^2+1$ 在区间 [0，2]上的极小位置。

第六章　无约束梯度法

第二到第四章讨论了解最优化问题的**间接方法**，之所以称为间接法，是因为这些方法只给出了最优解的必要条件。为了得到问题的数值解，还必须求解作为必要条件的方程和不等式组。

第五章介绍了一元的单峰函数最优化的**直接方法**。之所以称为直接法，是因为这通常是一些迭代的数值过程或**算法**，直接对目标函数进行运算以求得答案。在这些方法中，没有正式的中间步骤去确定最优解的必要条件，尽管这些算法本身可以用这些条件推导出来。

从本章开始，我们讨论解多维问题的直接方法。首先讨论最简单的一种，即**梯度算法**。这一算法是解约束问题和无约束问题的许多直接方法的基础。尽管这些方法的收敛性并未完全解决，但由于方法简单，应用最为广泛。本章讨论梯度算法及其在解无约束问题中的应用。

一、梯度方向

在第一章中，定义了 n 元可微函数 $f(\mathbf{x})$ 的梯度是 n 维向量

$$\nabla f(\mathbf{x})=\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}),\frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}),\ \cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})\ \right]^T$$

这个向量所确定的方向叫做**梯度方向**，它是所有梯度算法的基础。在形式地推导梯度算法之前，先从直观上考察一下，为什么在解最优化问题时常使用梯度方向。梯度方向在

求极小问题中称**最速下降**方向。在求极大问题中又称**最速上升**方向，从这些不同的名称中可以得到启发。

例如，假设我们要攀登一个单峰山的顶峰。显然，如果每一步都沿最速上升方向走，我们就会沿最短的路线到达顶峰。由于这条路省鞋（尽管可能不省力），看来这在某种意义下是有效的，因而值得作进一步的研究。

例6-1 设想一只近视的苍蝇落在碗边上，它想爬到碗底。碗的表面用函数$f(\mathbf{x})$表示。假如该苍蝇不近视，它就会直接看到碗底并飞到那儿。然而近视使它只能沿着碗的表面爬行。由于它只能按固定步长(苍蝇步子)行走，所以每一步都要谨慎地选择方向，以便走最短的距离用最少的时间到达碗底。每一步都沿着负梯度方向$-\nabla f(\mathbf{x})$走，就可以实现这一极小化。因此，在每一步，苍蝇从所有可能的下降方向中选择下降得最快的一个。换言之，它选择最速下降的路径。注意到近视的苍蝇和梯度向量，二者都只是利用了在每点的**局部的**信息，因此，这样只达到**局部最优**。

例6-2 考虑一个停在任意形状的碗沿上的小物体。假如物体沿碗内侧下滑时，摩擦力足够大，从而可以忽略惯性，那么它会在每一点沿负梯度方向滑下，并且滑行出一条到达碗底的最速下降的路径。

〔**解**〕 现在推导问题

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

的最速下降路径，其中$\mathbf{x}$是n维向量，$f(\mathbf{x})$是可微函数。

任意选$\mathbf{x}_0$为出发点，要确定一邻近的点$\mathbf{x}_0+d\mathbf{x}$使得

$$f(\mathbf{x}_0+d\mathbf{x})<f(\mathbf{x}_0)$$

实际上，要选择$d\mathbf{x}$使得差

$$f(\mathbf{x}_0)-f(\mathbf{x}_0+d\mathbf{x})$$

最大，沿最速下降路径相应于向量$d\mathbf{x}$，有路程增量 ds，定义作

$$(ds)^2=\sum_{i=1}^{n}(dx_i)^2$$

或
$$1-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dx_i}{ds}\right)^2=0$$

其中dx_i/ds是向量$d\mathbf{x}$的方向余弦。

现在选取dx_i/ds使得变化率df/ds最大。由于

$$\frac{df}{ds}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{dx_i}{ds}$$

最速下降路径可通过选取 dx_i/ds 以求解下面的问题得到，即解

$$\max_{dx_i/ds}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{ds}$$

且使
$$1-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dx_i}{ds}\right)^2=0$$

可以用 Lagrange 乘子法求解这个问题，这时

$$L\left(\frac{dx_i}{ds},\ \lambda\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{ds}+\lambda\left[1-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dx_i}{ds}\right)^2\right]$$

必要条件为

$$\nabla_{dx_i/ds}L=\frac{\partial f}{\partial x_i}-2\lambda\frac{dx_i}{ds}=0,$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{6.1}$$

$$\nabla_\lambda L = 1 - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dx_i}{ds}\right)^2 = 0 \tag{6.2}$$

解(6.1)和(6.2)得到

$$\frac{dx_i}{ds} = \frac{1}{2\lambda}\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

其中 $$\lambda = \pm\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2\right]^{1/2}$$

或者 $$\frac{dx_i}{ds}(\mathrm{x}) = \pm\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathrm{x})}{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathrm{x})\right)^2\right]^{1/2}},$$

$$i=1,2,\ \cdots,\ n \tag{6.3}$$

由于整个分母是正规化因子，可见最速下降路径的方向用梯度向量给出.求极大问题选用正梯度方向,求极小问题则选负梯度方向。

例6-3 证明目标函数沿梯度路径单调下降。

〔证〕

$$\frac{df}{ds} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{ds} = \pm\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2\right]^{1/2}}$$

$$= \pm\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2\right]^{1/2}$$

因为括号内的项非负，所以平方根存在。

当求极大时，$\frac{df}{ds} \geqslant 0$

当求极小时，$\frac{df}{ds} \leqslant 0$

例6-4 证明沿梯度路径不能走有限路程而达到$f(\mathbf{x})$的最优点。

〔**证**〕 从例6-3得到

$$\frac{df}{ds} = \pm\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2\right]^{1/2}$$

然而，在最优点$\mathbf{x}^*$处，

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

因此，当接近最优点时，$\partial f/\partial x_i$趋于0且收敛速度df/ds减小。用极限的话说，因为

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \to 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

不能以有限步精确达到最优值。当以常速v运动时，$ds = v dt$在有限时间内也不能达到最优值。

例6-5 推导求椭圆抛物面$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2$的极小的梯度路径。

〔**解**〕 梯度是

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} 2x_1 \\ 4x_2 \end{Bmatrix}$$

从等式(6.3)有

$$\frac{dx_1}{ds} = -K\frac{\partial f}{\partial x_1} = -2Kx_1$$

$$\frac{dx_2}{ds} = -K\frac{\partial f}{\partial x_2} = -4Kx_2$$

其中K是规范化因子

$$K=\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathrm{x})\right)^2\right\}^{-1/2}$$

因此

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{dx_2}{ds}\frac{ds}{dx_1}=\frac{2x_2}{x_1}$$

或 $$\frac{dx_2}{x_2}=2\frac{dx_1}{x_1}$$

积分得 $$\ln x_2=2\ln x_1+C$$

或 $$\ln\frac{x_2}{x_1^2}=C$$

或 $$x_2=e^C x_1^2$$

于是梯度路径是一条如图6-1所示的抛物线。

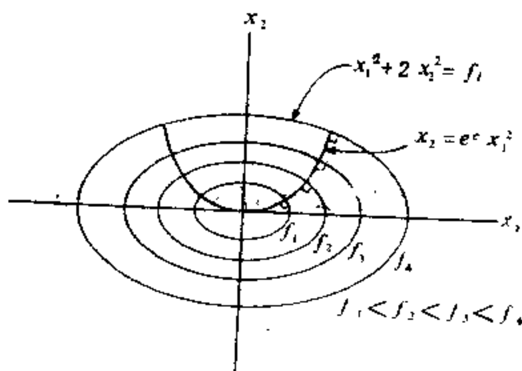


图 6-1

例6-6 证明例6-5中的梯度路径与等值线垂直。

[证] 如果两条曲线法向量的内积等于0，则这两条曲

线正交。这样，等值线的法向量为

$$\mathbf{n}_1=\begin{bmatrix}2x_1\\4x_2\end{bmatrix}$$

梯度的法向量为

$$\mathbf{n}_2=\begin{bmatrix}2e^C x_1\\-1\end{bmatrix}$$

$\mathbf{n}_1$和$\mathbf{n}_2$的内积为

$$(\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2)=[2x_1,4x_2]\begin{bmatrix}2e^C x_1\\-1\end{bmatrix}=4(e^C x_1^2-x_2)$$

由例6-5的结果，可知此值为0。

二、梯度算法

最速下降路径的连续方程由(6.3)式给出。事实上，通过在模拟计算机上实现这个方程，并且连续地计算 $\mathbf{x}$ 的函数 $\partial f/\partial x_i, i=1,2,\cdots,n$就可以求得问题的最优解。然而，实际上经常是在数字计算机上解这类问题，因此，需要方程(6.3)的迭代形式，这个迭代形式称为**梯度算法**。

一般地说，一个**算法**就是一项利用点$\mathbf{x}_k\in S\subset E^n$(或点列$\mathbf{x}_k,\mathbf{x}_{k-1},\cdots$)来确定新的点$\mathbf{x}_{k+1}\in S\subset E^n$的规则。

将方程(6.3)写作

$$dx_i=\pm ds\frac{\partial f^n}{\partial x_i}(\mathbf{x}),\qquad i=1,2,\cdots,n$$

就得到梯度算法，其中 $\partial f^n/\partial x_i$表示**规范化**梯度的第 i 个分量。将ds看作所选步长k,梯度算法可表示为

$$\mathbf{x}^{p+1}=\mathbf{x}^p+k\nabla f(\mathbf{x}^p)\tag{6.4}$$

其中对于求极大问题，$k>0$；对求极小问题，$k<0$，$\nabla f(x^p)$理解为在点x^p的规范化梯度。

如果k很小，这个离散的算法将非常近似于梯度路径，但由于必须多次计算梯度，所以收敛很慢。另一方面，如果k较大，则一开始就收敛很快，但算法将围绕最优点振荡。

例6-7 对于例6-5，取$k=4$，初始点$x_0=(4,4)$，说明梯度算法的效果。

［**解**］ 结果如图6-2所示。

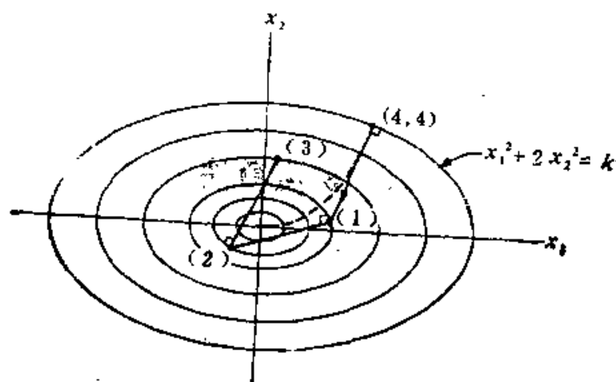


图6-2

因此很明显，在接近最优点时，必须寻找一些办法来减小步长。一般地，当远离最优点时，需要大的步长，而当振荡正要出现时，则需减小步长。对此，有许多方法可供采用。例如每做m步后，或当目标函数值不减时，以固定的比例缩小步长。这些特殊的方法经常是行之有效的。但有一种选取步长的方法，趋于使所要算的步数最少，这样的方法在下一段讨论。

三、最优梯度

在**最优梯度**方法中，我们沿x^p点的梯度方向运动，直至达到(关于这个方向的)局部极小点为止。因为如果继续运动通过此点，目标函数值将增大，所以这时要确定新的梯度$\nabla f(x^{p+1})$。这个方法会减少所算的步数，但由于为确定新的步长必须解求极小问题，因而加大了每一步的计算量。由于$f(x^{p+1})$作为步长k的函数，其解析表达式常常是未知的，所以k的一维极小问题常要用第五章所述的某一方法来求解。

在每一步需要求解的一维问题，是确定步长k，使$f(x^{p+1})$沿直线$x^{p+1}-x^p=\nabla f(x^p)$取极小值，这个问题可写为

$$\min_{k} f(x^p+k\nabla f(x^p))$$

一旦x^p取定，它只是k的函数，这一极小问题的必要条件是

$$\frac{\partial f}{\partial k}(x^p+k\nabla f(x^p))=0$$

例6-8 确定问题

$$\min_{x}\left[f(x)=\frac{1}{2}x^TQx\right]$$

的最优步长。

[**解**] 在这种情况下，最优步长可以解析地确定如下：

$$\nabla f(x^p)=Qx^p$$

$$x^{p+1}=x^p+kQx^p$$

因此，我们希望求

$$(x^{p+1})=\frac{1}{2}(x^p+kQx^p)^TQ(x^p+kQx^p)$$

$$=\frac{1}{2}\left[x^TQx+kx^TQ^2x+kx^TQ^TQx+k^2x_TQ^TQ^2x\right]_{x^p}$$

的最小

$$\frac{\partial f}{\partial k}=\frac{1}{2}\left[x^TQ^2x+x^TQ^TQx+2kx^TQ^TQ^2x\right]_{x^p}=0$$

因为二次型$Q=Q^T$，所以

$$k^*=-\left[\frac{x^TQ^2x}{x^TQ^3x}\right]_{x^p} \tag{6.5}$$

四、收敛性讨论

如果一个算法有

$$\lim_{p\to\infty}\nabla f(x^p)=0$$

则称它是收敛的。对于二次型，若Q是正定的，由方程(6.3)给出的梯度算法是收敛的。然而，正如例6-4所示，这种算法在有限步内达不到最优点。当用最优步长法时，梯度算法以等比改进了$f(x^p)$，即

$$\lim_{p\to\infty}\left\{\frac{f(x^{p+1})-f(x^*)}{f(x^p)-f(x^*)}\right\}=\lim_{p\to\infty}\frac{f(x^{p+1})}{f(x^p)}=a$$

其中$0\leqslant a<1$，收敛速度关于$f(x^p)$是线性的，比第九章中讨论的二次收敛算法慢得多。

有时把目标函数化成更对称的形式，可以加快梯度算法的收敛速度。

例6-9 $\min\limits_{x} x_1^2+2x_2^2$

［**解**］ 这个问题的椭圆型的等值线和梯度路径在图6-1

中给出，它需要走离散的无穷多步到达最优点。但如果令

$$y^2=2x_2^2$$

问题就转化为

$$\min_{x_1, y} x_1^2+y^2$$

等直线是圆。因此，从任意点出发，梯度算法能够一步就恰好到达最优点。

由于梯度算法只用了梯度的局部信息，所以它收敛到局部最优点，究竟收敛到哪个局部最优点，依赖于初始点的选择。

例6-10 考虑如图6-3所示的曲面，它表示由一道山脊连接起来的两个山峰。考察初始点分别为 A、B和C 时梯度算法的情况。

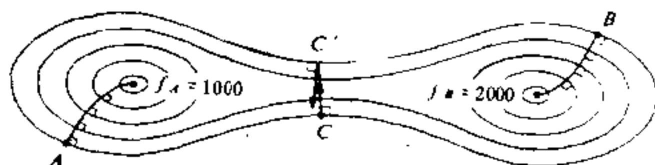


图 6—3

［解］ 从点A出发梯度路径将收敛到局部极大$f_A=1000$，而从点B出发梯度算法将收敛到局部极大$f_B=2000$。从点C出发的梯度路径越过山岭到C'，而C'的梯度方向又往回指向C，因此，走两步后，几乎没有向两个极大值点中的任何一点移近。沿山脊(或山谷)的情况是梯度算法的障碍之一，然而，注意到最优梯度法是到达脊顶再重新计算梯度，然后再沿山脊以有效的方式移动。

有几种方法用来加速沿山脊的梯度算法的收敛性，其中典型的一种算法是

$$\mathbf{x}^{p+1}=\mathbf{x}^p+k_1\nabla f(\mathbf{x}^p)+k_2\nabla f(\mathbf{x}^{p-1})$$

这里用到了前两步的梯度方向，若k_1和k_2是最优步长，则这种算法叫做**平行切线法**或PARTAN法(见问题6-11)。

显然，梯度算法所需的步数，主要取决于初始点的选定。一般来说，初始点越接近最优点越好。为选择合适的初始点，通常有必要在稀网格上直接计算$f(\mathbf{x})$，对非单峰情况更是如此。

终点同样是重要的，因为按定义，一种算法如果不给出停步规则会无限地继续下去。虽然总想使停步点尽可能靠近最优点，但最优点是未知的，因此不可能直接度量$f(\mathbf{x}^p)-f(\mathbf{x}^*)$。最常用的规则是当$f(\mathbf{x}^p)$的改进率降低到某个正的阈值$\varepsilon$以下时停步。因此，对于求极小问题，停步规则是

$$f(\mathbf{x}^p)-f(\mathbf{x}^{p+1})\leqslant\varepsilon$$

对极大问题则是

$$f(\mathbf{x}^{p+1})-f(\mathbf{x}^p)\leqslant\varepsilon$$

由于在点$\mathbf{x}^*$必要条件成立，$\nabla f(\mathbf{x}^*)=0$，两个另外的选择准则是当

$$\max_i\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^p)\right|<\varepsilon$$

或当

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^p)\right)^2<\varepsilon$$

时停步。与此不同的一类停步方法是在最优点邻近放弃梯度算法并用最新的几个点拟合一个二次曲面，把必要条件应用于二次曲面则得最优点的近似值。(见问题6-12，也见二次

插值。）

贯穿本章，总假定可以得到梯度向量的解析表达式，然后可在某个需要的点计值。在梯度不能解析地求得时，在每个点$\mathbf{x}^p$上可以通过作一小扰动或有时要用实验近似地确定，因此

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^p)\approx\frac{f(\mathbf{x}^p+\Delta\mathbf{x}_i)-f(\mathbf{x}^p)}{\Delta x_i}$$

其中$\Delta\mathbf{x}_i$为一向量，除第i个分量值为Δx_i外其余分量都是零。甚至当梯度能解析地求得但非常复杂时，也常常从计算效率的角度提出这种实验的方法。

习题与题解

6-1 画出曲面

$$f(x)=3x_1+4x_2^2$$

的等值线图，并指出求$f(\mathbf{x})$极小的连续的梯度路径，以第一象限的某个点(x_1^0, x_2^0)为初始点。

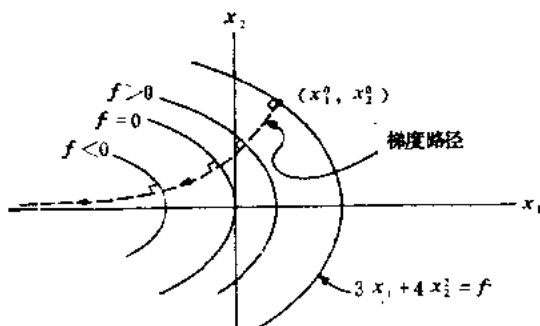


图 6—4

［解］ 解如图6-4所示。

6-2 用解析方法求出问题6-1的连续梯度路径。

［解］ 梯度路径由方程

$$\frac{dx_i}{ds}=-k\frac{\partial f}{\partial x_i},\ i=1,2$$

给出，因此

$$\frac{dx_1}{ds}=-k_3,\qquad \frac{dx_2}{ds}=-k8x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{8}{3}x_2$$

则

$$\int_{x_2^0}^{x_2}\frac{dx_2}{x_2}=\frac{8}{3}\int_{x_1^0}^{x_1}dx_1$$

或

$$\ln\frac{x_2}{x_2^0}=\frac{8}{3}(x_1-x_1^0)$$

所以梯度路径是

$$x_2=x_2^0\exp\left[\frac{8}{3}(x_1-x_1^0)\right]$$

6-3 给出问题6-1的梯度算法的离散形式

$$\mathrm{x}^{p+1}=\mathrm{x}^p+k\nabla f(\mathrm{x}^p)\qquad k<0$$

［解］ 由规范化梯度得到

$$\nabla f(\mathrm{x}^p)=\frac{1}{\sqrt{9+64x_2^2}}\begin{bmatrix}3\\8x_2\end{bmatrix}_{\mathrm{x}^p}$$

因此

$$x_1^{p+1}=x_1^p+\frac{3k}{\sqrt{9+64(x_2^p)^2}},\quad k<0$$

$$x_2^{p+1}=x_2^p+\frac{8kx_2^p}{\sqrt{9+64(x_2^p)^2}},\quad k<0$$

6-4 确定步长k_p，使得在第p次迭代中，函数$f(\mathbf{x})$的值减小一指定的百分数。

〔解〕 对梯度算法

$$\mathbf{x}^{p+1}=\mathbf{x}^p+\Delta\mathbf{x}^p$$

其中

$$\Delta\mathbf{x}^p=k_p\nabla f(\mathbf{x}^p)$$

取一阶近似

$$\Delta f(\mathbf{x})=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x})\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x})\Delta x_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})\Delta x_n$$

或

$$\Delta f(\mathbf{x}^p)=[\nabla f(\mathbf{x}^p)]^T\Delta\mathbf{x}^p=k_p[\nabla f(\mathbf{x}^p)]^T\nabla f(\mathbf{x}^p)$$

如果我们想使$\Delta f(\mathbf{x}^p)$占$f(\mathbf{x}^p)$的固定的比例c，则

$$\Delta f(\mathbf{x}^p)=cf(\mathbf{x}^p),\quad 0<c<1$$

$$k_p=\frac{cf(\mathbf{x}^p)}{[\nabla f(\mathbf{x}^p)]^T\nabla f(\mathbf{x}^p)}$$

一种合理的选法是选$c=0.1$，即每一步使$f(\mathbf{x}^p)$减少10%。

6.5 设$f(\mathbf{x})$二次可微，求最优步长k_p^*的近似值。

〔解〕 在$\mathbf{x}^p$处把$f(\mathbf{x})$展成Taylor级数，忽略高于二阶的项，则得

$$f(\mathbf{x}^p+\Delta\mathbf{x})=f(\mathbf{x}^p)+[\nabla f(\mathbf{x}^p)]^T\Delta\mathbf{x}+\frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}^T\mathbf{H}(\mathbf{x}^p)\Delta\mathbf{x}$$

其中$H(x^p)$是Hesse矩阵，沿梯度方向

$$\Delta x = k_p \nabla f(x^p) = k_p \nabla f$$

所以

$$f(x^p + k_p \nabla f) = f(x^p) + k_p (\nabla f)^T \nabla f + \frac{1}{2} k_p^2 (\nabla f)^T H(x^p) \nabla f$$

$$\frac{\partial f}{\partial k_p} = (\nabla f)^T \nabla f + k_p (\nabla f)^T H(x^p) \nabla f = 0$$

且

$$k_p^* = \left[\frac{-(\nabla f)^T \nabla f}{(\nabla f)^T H(x^p) \nabla f} \right]_{x^p}$$

当 $$f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x$$

有 $$\nabla f(x) = Qx \text{和} H(x) = Q$$

可上面关于k_p的表达式与例6-3中确定的形式是相同的。

6-6 在什么条件下，用例6-9中的最优步长，梯度法能有限步收敛？

［**解**］ 在例6-9中

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x \text{和} k^* = -\frac{x^T Q^2 x}{x^T Q^3 x}$$

所以

$$f(x^{p+1}) = \frac{1}{2}(x + kQx)^T Q (x + kQx)$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^T Q x + 2k x^T Q^2 x + k^2 x^T Q^3 x \right]_{x^p}$$

代入k得到

$$f(x^{p+1}) = \frac{1}{2}\left[x^T Q x - \frac{(x^T Q^2 x)^2}{x^T Q^3 x} \right]_{x^p}$$

若Q是正定的，最小值在原点达到，且Q可写成具有正特征值λ_i的对角矩阵，于是

$$f(\mathbf{x}^{p+1})=\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 x_i^2\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^3 x_i^2}\right]_{\mathbf{x}^p}$$

为了在有限步p处达到原点，即

$$f(\mathbf{x}^{p+1})=0$$

则要求

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^3 x_i^2\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 x_i^2\right)^2$$

若$\mathbf{x}^p$的所有分量除去一个以外都为0，即$\mathbf{x}^p$在坐标轴上，则这一等式成立。一般说来，除非初始点取在坐标轴上，将不会出现这种情况。一个例外是对所有的i都有$\lambda_i=\lambda$的时候，在这种情况下，对任意的$\mathbf{x}^p$这个方法都是一步收敛，这时二维情形的等值线为圆。

6-7 证明在最优梯度算法中，相邻的两步是正交的。

［证］ 在$\mathbf{x}^p$和$\mathbf{x}^{p+1}$处标准向量分别为$\nabla f(\mathbf{x}^p)$和$\nabla f(\mathbf{x}^{p+1})$，若

$$(\nabla f(\mathbf{x}^p),\ \nabla f(\mathbf{x}^{p+1}))=0$$

或用梯度算法，若

$$(\nabla f(\mathbf{x}^p),\ \nabla f(\mathbf{x}^p+k\nabla f(\mathbf{x}^p)))=0$$

则这两个向量正交。对最优梯度算法，必须有

$$\frac{\partial f}{\partial k}(\mathbf{x}^{p+1})=0$$

或等价地有

$$\frac{\partial f}{\partial k}(\mathbf{x}^p+k\nabla f(\mathbf{x}^p))=0$$

由此得出

$$\left(\nabla f(\mathbf{x}^p+k\nabla f(\mathbf{x}^p),\nabla f(\mathbf{x}^p)\right)=0$$

这就是正交性所要求的关系式。

6-8 对于二次型

$$f(x)=\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}$$

证明最优梯度算法相邻的两步是正交的。

［证］ 由问题6-7可知

$$(\nabla f(\mathbf{x}^p),\ \nabla f(\mathbf{x}^{p+1}))=0$$

其中

$$\nabla f(\mathbf{x}^p)=\mathbf{Q}\mathbf{x}$$
$$\nabla f(\mathbf{x}^{p+1})=\mathbf{Q}(\mathbf{x}+k\mathbf{Q}\mathbf{x})$$

$$k^*=-\frac{\mathbf{x}^T\mathbf{Q}^2\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{Q}^3\mathbf{x}}$$

代入正交性关系式，得到

$$(\mathbf{Q}\mathbf{x},\mathbf{Q}\mathbf{x}+k\mathbf{Q}^2\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{Q}^2\mathbf{x}-\left(\frac{\mathbf{x}^T\mathbf{Q}^2\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{Q}^3\mathbf{x}}\right)\mathbf{x}^T\mathbf{Q}^3\mathbf{x}$$

$$=\mathbf{x}^T\mathbf{Q}^2\mathbf{x}-\mathbf{x}^T\mathbf{Q}^2\mathbf{x}=0$$

6-9 将最优梯度算法用于二次型

$$f(\mathbf{x})=\frac{1}{2}(x_1^2+2x_2^2)$$

起点为(4,4)，并证明

$$(\nabla f(\mathbf{x}^0),\ \nabla f(\mathbf{x}^1))=0$$

［证］ 写成矩阵形式

$$f(\mathbf{x})=\frac{1}{2}\mathbf{x}^T Q\mathbf{x}$$

其中

$$Q=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$$

因此

$$Q^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 4\end{bmatrix} \qquad Q^3=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 8\end{bmatrix}$$

$$\nabla f(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}x_1\\2x_2\end{bmatrix}$$

$$k^0=-\frac{[4,\ 4]\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}}{[4,\ 4]\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}}=-\frac{5}{9}$$

所以

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}-\frac{5}{9}\begin{bmatrix}4\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{16}{9}\\-\frac{4}{9}\end{bmatrix}$$

$$\nabla f(\mathbf{x}^0)=\begin{bmatrix}4\\8\end{bmatrix}$$

$$\nabla f(\mathbf{x}^1)=\begin{bmatrix}\frac{16}{9}\\-\frac{8}{9}\end{bmatrix}$$

则

$$(\nabla f(\mathbf{x}^0),\nabla f(\mathbf{x}^1))=[4,8]\begin{bmatrix}\frac{16}{9}\\ -\frac{8}{9}\end{bmatrix}=0$$

从图 6-5 我们看到，$\mathbf{x}^1$点的梯度方向也和过这点的等值线正交。

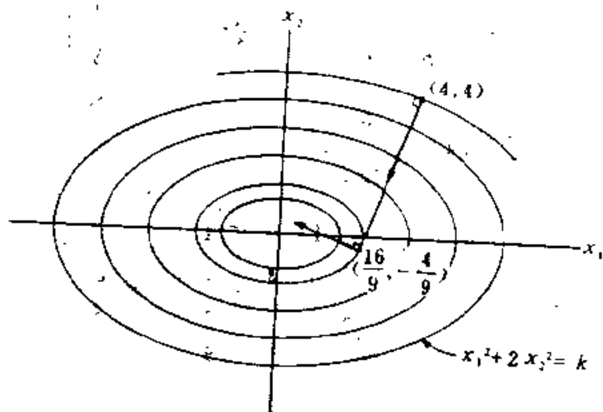


图 6-5

6-10 从点(2,−2)出发用最优梯度算法作四次迭代来求解

$$\min_{\mathbf{x}} 2x_1^2+2x_1x_2+5x_2^2$$

[解] 矩阵形式

$$f(\mathbf{x})=\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 10\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

$$\nabla f(\mathbf{x})=Q\mathbf{x}=\begin{bmatrix}4x_1+2x_2\\ 2x_1+10x_2\end{bmatrix}$$

由于

$$\mathbf{Q}^2=\begin{bmatrix}20 & 28\\ 28 & 104\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Q}^3=\begin{bmatrix}136 & 320\\ 320 & 1096\end{bmatrix}$$

由问题6-5有

$$k^*=-\frac{20x_1^2+56x_1x_2+104x_2^2}{136x_1^2+640x_1x_2+1096x_2^2}$$

在初始点(2, −2)

$$k_0^*=-0.122$$

所以

$$\mathbf{x}^1=\begin{bmatrix}2\\ -2\end{bmatrix}-0.122\begin{bmatrix}4\\ -16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.511\\ -0.046\end{bmatrix}$$

类似地

$$k_1^*=-0.156, \quad x_1^2=0.577, \quad x_2^2=-0.448$$

$$k_2^*=-0.141, \quad x_1^3=0.377, \quad x_2^3=0.022$$

$$k_3^*=-0.134, \quad x_1^4=0.183, \quad x_2^4=-0.101$$

6-11 对于n个变量的二次函数，平行切线法(PARTAN)经过$2n-1$步找出最优点。在PARTAN法中，确定初始点$\mathbf{x}^0$后，随后两个点$\mathbf{x}^1$和$\mathbf{x}^2$由最优梯度算法确定，然后沿方向$\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^2$找出$\mathbf{x}^3$，并把此过程延续下去。

对二维二次型

$$f(\mathbf{x})=x_1^2+2x_2^2$$

证明 PARTAN 法由初始点(5,5)出发，经过三步就恰好收敛到最优点(0,0)。

[**证**] 按矩阵形式

$$f(\mathbf{x})=\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

$$\nabla f(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}2x_1\\4x_2\end{bmatrix},\quad \mathbf{Q}^2=\begin{bmatrix}4 & 0\\0 & 16\end{bmatrix},\quad \mathbf{Q}^3=\begin{bmatrix}8 & 0\\0 & 64\end{bmatrix}$$

最优步长为

$$k^*=-\frac{4x_1^2+16x_2^2}{8x_1^2+64x_2^2}$$

所以

$$k_0^*=-\frac{20}{72}$$

$$\mathbf{x}^1=\begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix}-0.2778\begin{bmatrix}10\\20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{20}{9}\\-\frac{5}{9}\end{bmatrix}$$

$$k_1^*=-\frac{5}{12}$$

$$\mathbf{x}^2=\begin{bmatrix}\frac{20}{9}\\-\frac{5}{9}\end{bmatrix}-\frac{5}{12}\begin{bmatrix}\frac{40}{9}\\-\frac{20}{9}\end{bmatrix}=\frac{1}{108}\begin{bmatrix}40\\40\end{bmatrix}$$

现在

$$\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^2=\begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix}-\frac{1}{108}\begin{bmatrix}40\\40\end{bmatrix}=\frac{1}{108}\begin{bmatrix}500\\500\end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}^3$将沿$\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^2$找出，因此

$$\mathbf{x}^3=\mathbf{x}^2+k_3(\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^2)=\frac{1}{108}\begin{bmatrix}40-500k_3\\40-500k_3\end{bmatrix}$$

现在

$$f(\mathbf{x}^3)=\frac{1}{(108)^2}\Big[(40-500k_3)^2+2(40-500k_3)^2\Big\}$$

由必要条件$\partial f/\partial k_3=0$得到$k_3^*=40/500$，所以

$$x^3=\frac{1}{108}\begin{bmatrix}40-40\\40-40\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

PARTAN算法恰好三步收敛到极小点，这三步如图 6-6 所示。

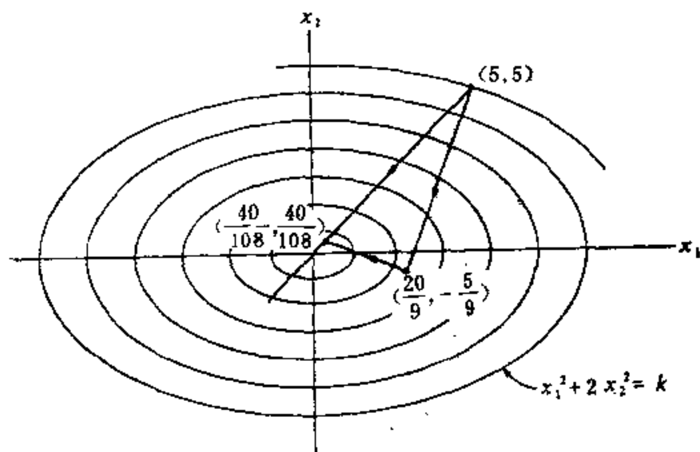


图 6—6

6-12 在最优点邻近梯度算法因为要用小步长，所以效率很不好。在此区域中一个加快收敛的方法是通过这个区域上的几个点拟合一个二次曲面，然后通过求二次曲面的极小得到最优点的近似值。

将有定步长$k=0.03$的梯度方法用于问题

$$\min_x[f(x)=e^{(x^2+x+1)}]$$

［解］ 假定最后三步是

$x=0.03,\qquad f(0.03)=e^{1.0318}$

$x=0.00,\qquad f(0.00)=e^{1.0}$

$x=-0.03,\qquad f(-0.03)=e^{0.9718}$

现在求通过这三个点的二次函数

$$\hat{f}(x)=ax^2+bx+c$$

由这三个点唯一确定a，b和c

$$a=5.55,\qquad b=2.83,\qquad c=2.72$$

求$\hat{f}(x)$的极小。

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial x}\ 2ax+b=0$$

$$\hat{x}^*=-\frac{b}{2a}=-0.255$$

通过对$f(x)$求极小得到真正的极小值点，

$$\frac{\partial f}{\partial x}=(4x+1)\exp(2x^2+x+1)=0$$

$$x^*=-0.250$$

在这种情况下，$f(\hat{x}^*)=2.400$，$f(x^*)=2.400$（计算准确到三位小数），所以误差小于0.1%。注意用步长0.03按梯度法再走七步到达$x=-0.24$，在这点$f(-0.24)$仍有类似的精度。为得到更高的精度，就要求再减小步长和继续进行迭代。

补　充　题

6-13　从点(7,9)开始，对k的几个不同的值，用等式(6.4)表示的梯度算法求

$$\max_{x} 36-9(x_1-6)^2-4(x_2-6)^2$$

6-14　从点(2,−2,1)出发，用最优梯度法迭代四次求解

$$\min_{x} x_1^2+x_2^2+2x_3^2$$

6-15从点(2,−2,1,−1)开始，对问题

$$\min_{x}\ x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$$

解答问题6-14。

6-16　从任意初始点$\mathbf{x}^0$出发，对二次型

$$f(\mathbf{x})=x_1^2+5x_2^2$$

求连续梯度路径，画出等值线与梯度路径的草图。

6-17　对问题6-16用固定步长L推导离散的梯度算法，对$L=2$从点(5,10)出发按梯度法走五步，给出各步结果。

6-18　对$L=4$重复问题6-17，但当$f(\mathbf{x}^p)$开始增大时，L减小一半。

6-19　证明如果$\mathbf{Q}$正定，则二次型

$$f(\mathbf{x})=\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}$$

的最优梯度算法是收敛的：

6-20　在第四章中说明了如何用Lagrange乘子法解问题$\min_{x} f(\mathbf{x})$，使得$g_i(\mathbf{x})\leqslant 0, i=1,2,\cdots,r$。指出如何用梯度算法求

$$\min_{x}\left\{L(\mathbf{x},\lambda^*)=f(\mathbf{x})+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^* g_i(\mathbf{x})\right\}$$

6-21　从点(6,6)开始用PARTAN方法三步确定

$$f(\mathbf{x})=3x_1^2+4x_2^2$$

的精确的最小值。

第七章　约束梯度法

使用梯度方法来解约束最优化问题已提出了许多的算法，虽然这些方法很多，以致不能希望在此作广泛的论述。但一般说来，还是可以分为两大类：(1)边界跟踪法，(2)惩罚函数法。本章讨论前一类，后一类将在第八章中论述。每一大类都讨论几种算法。

在边界跟踪法中，有许多专用于特殊类型问题的算法。一类特殊问题是目标函数或约束是线性的。这时，许多算法都是利用非线性函致的线性近似，从而可以将线性规划的求解放入到逐次改进线性近似的算法中。这些方法与某些进一步的尝试相结合，通常还可以适用于目标函数和约束都是非线性的问题。本章中讨论的**可行方向法**和**梯度投影法**都属于这种类型。

对于约束是线性的，目标函数是二次函数的这种特殊情况，很容易用线性规划方法得到解。这种特殊情况叫做二次规划，在第十章中叙述。

尽管第六章中讨论过的梯度算法还不知道如何使它快速收敛，但是它的应用简单并可用于大多数可微的非线性函数，由于这个原因，本章限于讨论用梯度算法解约束最优化问题的方法。

一、有不等式约束的边界跟踪

在第六章中，假设应用梯度算法的可行域是整个空间E^n。当加进不等式约束时，可行域被限制在某个集合$S\subset E^n$的内部和边界上。由可行域内选定开始点，沿梯度路径可以一直到达约束边界。然后另外选定一种方法用来改进目标函数值而又不离开可行域。通常这要偏离梯度路径并且常常是沿边界运动，因此，取名为**边界跟踪**法。

最简单的边界跟踪法，也许是每当运动到可行域外，就从目标函数的梯度方向改变为被破坏的约束的梯度方向。由于这时路径是沿着约束边界作"之"字形前进，交替地取目标函数梯度方向和约束梯度的方向，因此称这个方法为跟踪法(*hemstitching*)。

例7-1 对于问题

$$\min x_1^2+2x_2^2$$

$$\text{满足}\ x_1+x_2\geq 4$$

使用锁边算法，从可行点(1, 4.5)开始并取固定步长1.0。

［**解**］目标函数和约束的规范化梯度分别为

$$\nabla f(x)=(4x_1^2+16x_2^2)^{-\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}2x_1\\4x_2\end{bmatrix}$$

$$\nabla g(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

若x^p在可行域内，根据算法下一步为

$$x^{p+1}=x^p-1.0\nabla f(x^p)$$

若 $\mathbf{x}^p$ 在可行域外，则为

$$\mathbf{x}^{p+1}=\mathbf{x}^{p}+1.0\nabla g(\mathbf{x}^p)$$

用这个算法，有

$x_1^0=1$,	$x_2^0=4.50$	(可行点)
$x_1^1=0.89$,	$x_2^1=3.50$	(可行点)
$x_1^2=0.76$,	$x_2^2=2.50$	(不可行点)
$x_1^3=1.47$,	$x_2^3=3.21$	(可行点)
$x_1^4=1.05$,	$x_2^4=2.30$	(不可行点)
$x_1^5=1.76$,	$x_2^5=3.01$	(可行点)
$x_1^6=1.37$	$x_2^6=2.10$	(不可行点)
$x_1^7=2.08$,	$x_2^7=2.81$	(可行点)

钞边算法的这些步子如图 7-1 所示。

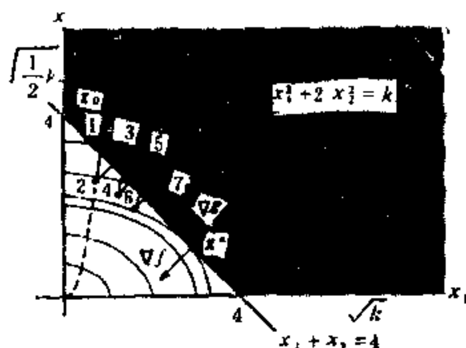


图 7-1

本问题的最小点在约束 $x_2=4-x_1$ 上，满足

$$\frac{\partial}{\partial x_1}[x_1^2+2(4-x_1)^2]=0$$

或 $x_1^*=2.667$，$x_2^*=1.333$。在最优点

$$-\nabla f(\mathbf{x}^*)=\begin{bmatrix}-0.707\\-0.707\end{bmatrix} \text{和} \nabla g(\mathbf{x}^*)=\begin{bmatrix}0.707\\0.707\end{bmatrix}$$

因此，果如所期，在最优点目标函数的梯度和约束的梯度大小相等，方向相反。

由于锁边法沿边界每移动一段小距离就要走许多步，因此该法并不是很有效的。然而，由于当梯度向量共线时，沿边界的过程就停止，因此这种算法给出了一个自动停步的准则。在这种情况下，当出现

$$-\nabla f(\mathbf{x}^*)=\nabla g(\mathbf{x}^*)+\varepsilon$$

就停步，其中 ε 是选定的适当小的数。

由于梯度算法只使用局部信息，因此有可能所求的只是局部最优解而不是全局最优解。当可行域(或目标函数)非凸时就会出现这种情况。

例 7-2 给出关于在图 7-2 中的等值线使用锁边算法所取的路径。分别确定从点 A 和点 B 开始的两条路径。

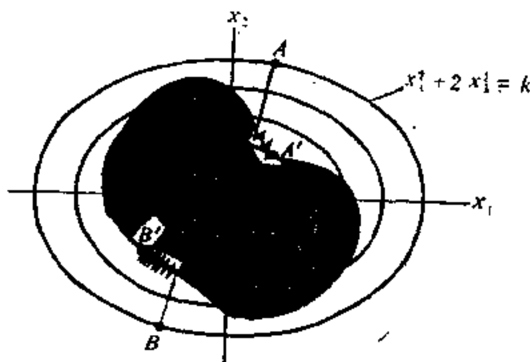


图 7-2

［解］从 A 点出发的路径得到局部最优点 A'，它也是全局最优；从 B 点出发的路径得到局部最优点 B'，但它不是全局最优点。

如第二章所述，要保证求得全局最优，只有或者规定所有的函数都是凸的，或者取足够多的不同的初始点，以便求得所有的局部最优点。一般来说，当驻点的数目不知道时，所需要的初始点的数目也不知道。在这种情况下，为了先得到关于曲面性质的某些信息，有理由在可行域上对 $f(\mathbf{x})$ 进行网格搜索。

对于不等式约束问题，它的解不是在可行域内部就是在边界上。在某些情况下，一种好方法是先撇开约束，求出无约束最优，然后验证这点是不是可行点，如果是，则完成解题；若不是，则必须求最优边界点。这时，求解的方法是从无约束最优点出发，沿着被破坏的约束的梯度方向运动。如果被破坏的约束不止一个，则可以把方向取作这些梯度的线性组合，比如按平行四边形法则所合成的向量。由于这是在从不可行点朝可行域运动，所以称这后一部分为外部法。

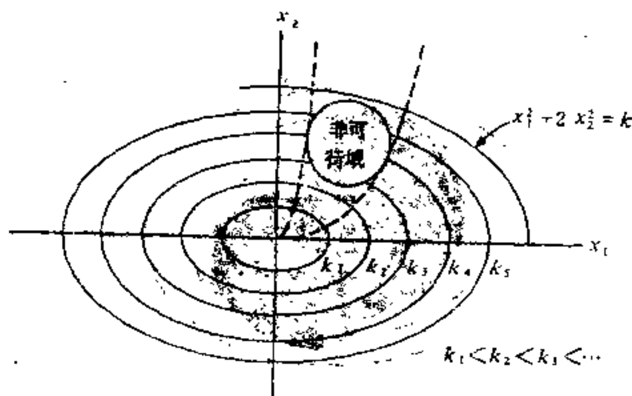


图 7-3

例7-3 对于图 7-3 中等值线所描述的问题，上述忽略不等式约束的方法是有效的，因为从阴影区域中的任一初始点出发都不必遇到可行域的边界。

[**解**] 现在来寻找一种比用锁边法更有效的方式沿约束边界运动的算法。这样的一种算法涉及到要构成目标函数和被破坏约束的梯度的向量和，于是沿着约束趋向于按所需要的方向运动。这个**多梯度累加**方法由下列算法定义

$$\mathbf{x}^{p+1}=\mathbf{x}^{p}+k_{p}\mathbf{d}^{p}$$

其中若 $\mathbf{x}^p$ 在可行域内，则

$$\mathbf{d}^{p}=\nabla f(\mathbf{x}^{p})$$

若 $\mathbf{x}^p$ 在可行域外，则

$$\mathbf{d}^{p}=\frac{\nabla f(\mathbf{x}^{p})}{\|\nabla(\mathbf{x}^{p})\|}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\nabla g_{i}(\mathbf{x}^{p})}{\|\nabla g_{i}(\mathbf{x}^{p})\|} \tag{7.1}$$

在可行域内，由

$$g_i(\mathbf{x})\leqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ r$$

所给定，并且在 $k_p<0$ 的情况下，$\mathbf{d}^p$ 的方程(7.1)对于求极小问题成立。在其他情况下，$\nabla f(\mathbf{x}^p)$或$\nabla g_i(\mathbf{x}^p)$的正负号必须作适当的调整。式(7.1)中的和式只是对于在 $\mathbf{x}^p$ 被破坏的 m 个约束取的。虽然当目标函数的等值线与约束接近于平行时会出现某些困难，但这种方法仍产生一个走向可行域内的运动。在这种情况下，可行域中由可以改进目标函数值的点所构成的子域也许太小，以致找不到。

例7-4 对于例7-1，在下述点上求多梯度累加和的方向，这个点是从(1, 4.5)出发的离散的梯度路径穿过约束边界的点。

[**解**] 从(1, 4.5)出发的离散梯度路径由方程

$$x_1 = 1 - 0.111\,k$$
$$x_2 = 4.5 - 0.995\,k$$
给出，这个路径与约束
$$x_2 = 4 - x_1$$
的交点是 $\hat{\mathbf{x}} = [0.85,\ 3.15]^T$。

在这个交点上，规范化梯度是

$$\frac{\nabla f(\hat{\mathbf{x}})}{\|\nabla f(\hat{\mathbf{x}})\|} = \frac{1}{\sqrt{2^2(0.85)^2 + 4^2(3.15)^2}} \begin{bmatrix} 2(0.85) \\ 4(3.15) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.134 \\ 0.993 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\nabla g(\hat{\mathbf{x}})}{\|\nabla g(\hat{\mathbf{x}})\|} = \begin{bmatrix} 0.707 \\ 0.707 \end{bmatrix}$$

由于不等式约束是大于或等于，因此(7.1)式中约束项的符号取负号，则多梯度累加和的方向是(取 $k = -1$)

$$-\mathbf{d} = \begin{bmatrix} -0.134 \\ -0.993 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.707 \\ -0.707 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.573 \\ -0.286 \end{bmatrix}$$

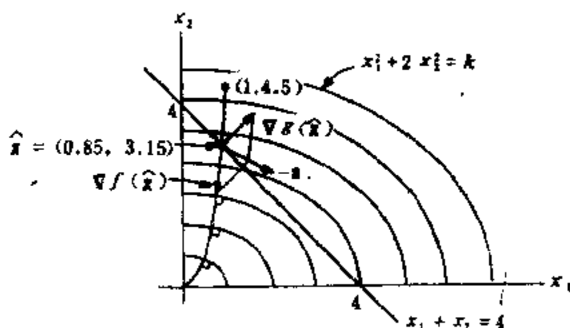


图 7-4

这个方向如图 7-4 所示，注意沿边界运动的分量为(1，-1)。

从例 7-4 我们注意到，虽然多梯度累加和的方向指向可行域，但它还不是紧贴约束边界。**可行方向法**克服了这一不足。在可行方向法中，每一步都加进了一个线性规划问题，用以确定与目标函数的梯度最接近的可行方向（从而也是最接近约束边界的可行方向）。

考虑问题

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

$$\text{且使}\quad g_i(\mathbf{x})\leqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ r$$

把每个非线性函数在 $\mathbf{x}^p$ 点展成 Taylor 级数，忽略高于一阶的项，则

$$f(\mathbf{x}^p+\mathbf{d}^p)\approx f(\mathbf{x}^p)+(\nabla f(\mathbf{x}^p),\ \mathbf{d}^p)$$

$$g_i(\mathbf{x}^p+\mathbf{d}^p)\approx g_i(\mathbf{x}^p)+(\nabla g_i(\mathbf{x}^p),\ \mathbf{d}^p)\qquad(7.2)$$

因为我们考虑的是求极小问题，$f(\mathbf{x}^p)$的改进将导致

$$f(\mathbf{x}^p+\mathbf{d}^p)-f(\mathbf{x}^p)\approx(\nabla f(\mathbf{x}^p),\ \mathbf{d}^p)<0\qquad(7.3)$$

当 $\mathbf{x}^p$ 是严格地在可行域的内部，即 $g_i(\mathbf{x}^p)<0$ 时，则存在某个步长 $k_p>0$，使得

$$\mathbf{x}^{p+1}=\mathbf{x}^p+k_p\mathbf{d}^p$$

对任意方向$\mathbf{d}^p$都是可行点。另一方面，当$\mathbf{x}^p$在边界$g_i(\mathbf{x}^p)=0$上时，则由(7.2)式，有

$$g_i(\mathbf{x}^p)+(\nabla g_i(\mathbf{x}^p),\ \mathbf{d}^p)<0,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,r\qquad(7.4)$$

此时，就存在某些$k_p>0$，使 $\mathbf{x}^{p+1}$是可行点。如果 (7.4) 式作为等式成立，则$\mathbf{x}^{p+1}$在过 $\mathbf{x}^p$ 的切平面上，这只有在 $g_i(\mathbf{x})$是线性式的情形，它才会是可行点。这时，(7.4) 变成

$$(\nabla g_i(\mathbf{x}^p),\mathbf{d}^p)\leqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ r \tag{7.5}$$

为了找出既使 $\mathbf{x}^{p+1}$ 是可行点，又和目标函数的梯度方向尽可能接近的方向 $\mathbf{d}^p$，我们引入松弛变量 $x_0\geqslant 0$，以将严格不等式(7.3)和(7.4)变为正常的不等式，然后解下列线性规划问题：

$$\max_{\mathbf{d}^p}\ x_0$$

$$\text{且使}\quad (\nabla f(\mathbf{x}^p),\ \mathbf{d}^p)+x_0\leqslant 0$$

$$g_i(\mathbf{x}^p)+(\nabla g_i(\mathbf{x}^p),\ \mathbf{d}^p)+x_0\leqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ r$$

或等价问题

$$\max_{\mathbf{d}^p}\ x_0 \tag{7.6}$$

$$\text{且使}\quad x_0+(\nabla f(\mathbf{x}^p),\ \mathbf{d}^p)\leqslant 0 \tag{7.7}$$

$$x_0+(\nabla g_i(\mathbf{x}^p),\ \mathbf{d}^p)\leqslant -g_i(x^p),\ i=1,\ 2,\ \cdots,r \tag{7.8}$$

当 $x_0=0$ 时，已不能再进一步改进，因而约束最优点已找到。于是只有当 $x_0>0$ 时，才继续解问题。

由于 $\mathbf{d}^p$ 的分量无符号上的限制；为避免无限解，必须附加约束，对所存的 j

$$d_j^p\leqslant b \tag{7.9}$$

因为我们的目的只在于确定一个方向 $\mathbf{d}^p$，所以只关心 d_j 的相对值，因此 b 可取作任一正的常数(例如1)。

总括起来，算法是：

1. 计算$\nabla f(\mathbf{x}^p)$和$\nabla g_i(\mathbf{x}^p)$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ r$。

2. 解由(7.6)—(7.9)式给出的线性规划问题。

3. 若 $x_0=0$，停步。

4. 否则，确定步长 $k_p>0$，使得 $f(\mathbf{x}^p+k_p\mathbf{d}^p)$是在所有(形式如 $\mathbf{x}^p+k\mathbf{d}^p$)可行点上的最小值。

例7-5 对于例 7-4，用可行方向法求从边界点 $\hat{x}=(0.85,\ 3.15)$出发的路径。

［解］ 由于约束是线性的，适合(7.5)式。又由于约束不等式的意义与上面的推导中的意义相反，因此线性规划问题由下式给出

$$\max_{d}\ x_0$$

$$\text{且使}\quad x_0+(\nabla f(\hat{x}),\ d)\leqslant 0$$

$$(-\nabla g(\hat{x}),\ d)\leqslant 0$$

$$d_1\leqslant 1,\ d_2\leqslant 1$$

其中

$$\nabla f(\hat{x})=\begin{bmatrix}0.134\\0.993\end{bmatrix},\qquad \nabla g(\hat{x})=\begin{bmatrix}0.707\\0.707\end{bmatrix}$$

约束方程可写作

$$0.134d_1+0.993d_2\leqslant -x_0$$

$$-0.707d_1-0.707d_2\leqslant 0$$

$$d_1\leqslant 1,\ d_2\leqslant 1$$

或

$$d_2\leqslant\frac{-1}{0.993}x_0-\frac{0.134}{0.993}d_1=-1.008x_0-0.135d_1$$

$$d_2\geqslant -d_1$$

$$d_1\leqslant 1,\ d_2\leqslant 1$$

可行域如图 7-5 所示，使 x_0 取最大的解为 $d_1=1, d_2=-1$，$x_0=0.993$。这个方向精确地沿图 7-4 所示的约束边界的方向。

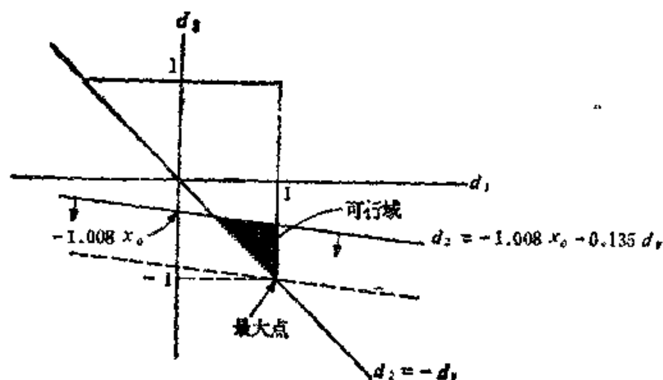


图 7-5

最小点为$\mathbf{x}^*=[2\ 667,\ 1\ 333]^T$，在此点梯度是

$$\nabla f(\mathbf{x}^*)=\begin{bmatrix}0\ 707\\ \\0.707\end{bmatrix},\qquad \nabla g(\mathbf{x}^*)=\begin{bmatrix}0.707\\ \\0.707\end{bmatrix}$$

线性规划问题是

$$\max_{d}\ x_0$$

$$\text{且使}\quad 0.707d_1+0.707d_2\leqslant -x_0$$

$$-0.707d_1-0.707d_2\leqslant 0$$

$$d_1\leqslant 1,\ d_2\leqslant 1$$

可行域为直线$d_2=-d_1$，$\max x_0=0$，因此最小点已达到。

二、有等式约束的边界跟踪

对等式约束问题应用梯度方法，除每次迭代的路径必须在边界上外，跟不等式约束问题是相似的。这样，可行域事

实上是某个边界曲面，显然**初始可行点**也必须取在那个曲面上。

在等式约束的情况下，如果有的约束可以对某个变量明显地解出，则问题可以大为简化。那时可以用这个约束从最优化问题中消去那个变量(也就是消去那个约束)。问题就对剩下的变量求解，再用消去的约束来确定消去变量的最优值。在大多数非线性约束的情况中，这种方法是难得可行的；然而，因为这会产生相当大的简化，所以决不应忽视这种可能性。

例7-6 用消去法解问题

$$\min x_1^2+x_2^2+x_3^2$$

$$\text{且使}\quad 2x_1+3x_2+x_3=1$$

［**解**］ 消去 x_3 得到

$$x_3=1-2x_1-3x_2$$

新的无约束问题成为

$$\min[f(\mathbf{x})=x_1^2+x_2^2+(1-2x_1-3x_2)^2]$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=2x_1+2(1-2x_1-3x_2)(-2)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=2x_2+2(1-2x_1-3x_2)(-3)=0$$

解为 $x_1^*=0.162$，$x_2^*=0.198$，$x_3^*=1-2(0.162)-3(0.198)$
$=0.082$

例7-7 用消去法化简问题

$$\max\ x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+x_4^2$$

$$\text{且使}\quad x_1+x_2+x_3+x_4=1$$

$$(x_1-x_2)^2+(x_3-x_4)^2=2$$

［**解**］ 消去 x_1，得到

$$x_1=1-x_2-x_3-x_4$$

新的问题为

$$\max(1-x_2-x_3-x_4)^2+2x_2^2+3x_3^2+x_4^2$$

$$\text{且使}\quad (1-2x_2-x_3-x_4)^2+(x_3-x_4)^2=2$$

于是问题从含有四个变量，二个约束简化为含有三个变量和一个约束。

现在我们来寻求用梯度法解等式约束问题的一般算法。梯度投影法便给出了这样的一种算法。下面先对线性等式约束的情况进行推导，然后再给出该算法对非线性等式约束情形的推导。

考虑问题

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

$$\text{且使}\qquad \mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}=0$$

其中$\mathbf{x}$是n维向量，$\mathbf{A}$是$m\times n$维矩阵，$m<n$。假设已得到某个可行点$\mathbf{x}^p$，并要沿最速下降路径运动到邻近的可行点$\mathbf{x}^p+d\mathbf{x}^p$。

由于$\mathbf{x}^p$是可行点，所以$\mathbf{A}\mathbf{x}^p-\mathbf{b}=0$。为使$\mathbf{x}^p+d\mathbf{x}^p$也是可行点，则要求

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}^p+d\mathbf{x}^p)-\mathbf{b}=0$$

由这两个关系式可导出

$$\mathbf{A}d\mathbf{x}^p=0 \tag{7.10}$$

在下面的推导中，为书写简单，暂时删去上标p。

沿任意的一个路径ds，它的方向余弦是dx_i/ds，$i=1$，2，…，n，则沿此路径有

$$\sum_{i=1}^{n}(dx_i)^2=(ds)^2 \tag{7.11}$$

现在要选择路径 ds、使得目标函数的变化率(负的)为最大。用求导法则，这个变化率可表成

$$\frac{df}{ds}=\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \frac{d\mathbf{x}}{ds} \tag{7.12}$$

其中

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}=\nabla f(\mathbf{x})$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds}=\left[\frac{dx_1}{ds},\ \frac{dx_2}{ds},\ \cdots,\ \frac{dx_n}{ds}\right]^T$$

为了在约束(7.10)和(7.11)下求(7.12)的最大值，首先作 Lagrange 函数

$$L\left(\frac{d\mathbf{x}}{ds},\ \boldsymbol{\lambda},\ \lambda_0\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \frac{d\mathbf{x}}{ds}+\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{A}\frac{d\mathbf{x}}{ds}$$

$$+\lambda_0\left[1-\left(\frac{d\mathbf{x}}{ds}\right)^T\left(\frac{d\mathbf{x}}{ds}\right)\right]$$

必要条件是

$$\nabla_{dx/ds}L=\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}-2\lambda_0\frac{d\mathbf{x}}{ds}+\mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda}=0 \tag{7.13}$$

$$\nabla_{\lambda}L=\mathbf{A}\frac{d\mathbf{x}}{ds}=0 \tag{7.14}$$

$$\nabla_{\lambda_0}L=1-\left(\frac{d\mathbf{x}}{ds}\right)^T\left(\frac{d\mathbf{x}}{ds}\right)=0 \tag{7.15}$$

从(7.13)解出 $d\mathbf{x}/ds$，得到

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds}=\frac{1}{2\lambda_0}\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}+\mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda}\right) \tag{7.16}$$

把(7.16)代入(7.15)，并且解出 λ_0，得到

$$\lambda_0=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{x}}+\lambda^T\mathbf{A}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}+\mathbf{A}^T\lambda\right)\right]^{1/2} \tag{7.17}$$

于是(7.16)可以写作

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds}=\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}+\mathbf{A}^T\lambda \tag{7.18}$$

其中右端被规范化为单位向量。把(7.16)代入(7.14)并解出λ，得到

$$\lambda=-(\mathbf{AA}^T)^{-1}\mathbf{A}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \tag{7.19}$$

这个解当且仅当$\mathbf{AA}^T$是非奇异时才存在。把(7.19)代入(7.18)得出方向余弦

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds}=[\mathbf{I}-\mathbf{A}^T(\mathbf{AA}^T)^{-1}\mathbf{A}]\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \tag{7.20}$$

其中$\mathbf{I}$是n阶单位矩阵。从(7.20)得出的算法的离散形式是

$$\mathbf{x}^{p+1}=\mathbf{x}^p+k_p\mathbf{P}\nabla f(\mathbf{x}^p) \tag{7.21}$$

其中$k_p<0$是步长，

$$\mathbf{P}=[\mathbf{I}-\mathbf{A}^T(\mathbf{AA}^T)^{-1}\mathbf{A}]$$

是规范化的投影矩阵。这个矩阵将梯度投影到由约束所定义的线性子空间上。跟前边一样，对于求极小问题，$k_p<0$；对于极大问题，$k_p>0$。

例7-8 把梯度投影法推广到具有非线性等式约束的问题。

［**解**］ 这时，约束是

$$g_i(\mathbf{x})=0, \qquad i=1, 2, \cdots, m$$

在可行点$\mathbf{x}^p$作线性化，得到

$$g_i(\mathbf{x}^p+d\mathbf{x}^p)\approx g_i(\mathbf{x}^p)+[\nabla g_i(\mathbf{x}^p)]^T d\mathbf{x}^p$$

为证保x^p+dx^p的可行性，上式必须等于零。因此

$$[\nabla g_i(x^p)]^T dx^p=0, \quad i=1, 2, \cdots, m$$

这个约束和(7.10)是相同的，在这里

$$A=A(x^p)=\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x^p}$$

所得结果除了A不再是常数矩阵而必须每步重新计算外，其余跟(7.21)式都相同。由于投影矩阵P把梯度投影到由$A(x^p)$确定的线性子空间上，当我们移动到点x^{p+1}时，一般地不满足约束。因此步长k_p必须保持很小，并且必须在每一步加上一个附加的过程来确定新的可行点，以便再在这一点建立由$A(x^{p+1})$所定义的支撑超平面。由于这一复杂性，而且每步都需要计算P，所以梯度投影法对于具有高度非线性约束的情形，是不适宜的。

例7-9 把梯度投影法推广到具有线性不等式约束

$$Ax-b\geqslant 0$$

的问题中去。其中A是$m\times n$维矩阵。

［**解**］ 考虑某个点x^p，设A_q是矩阵A的$q^p\times n$维子矩阵，对应于在x^p点是有效的，并且在下一次迭代也要求是有效的那些约束。［译者注：此处的有效约束与前文的紧约束同义，即在x^p点以等式成立的约束。］现在梯度投影法是

$$x^{p+1}=x^p+k_p[I-A_q^T(A_qA_q^T)^{-1}A_q]\nabla f(x^p)$$

$$=x^p+k_pP_q\nabla f(x^p)$$

并且 $k_p<0$，选择 k_p，使 $f(\mathbf{x})$沿向量 $\mathbf{P}_q\nabla f(\mathbf{x}^p)$ 取极小，而且不破坏当时所满足的每个约束。若在 $f(\mathbf{x})$达到最小以前到达一个新的约束边界，则将它的梯度作为一行加到矩阵 $\mathbf{A}_q$ 上，$\mathbf{P}_q$ 作相应的修改。若

$$\lambda^q=-(\mathbf{A}_q\mathbf{A}_q^T)^{-1}\mathbf{A}_q\nabla f(\mathbf{x}^p)$$

的某个分量是负的，则相应于这个分量的约束要从 $\mathbf{A}_q$ 中删去，继续这一过程，直到

$$\mathbf{P}_q\nabla f(\mathbf{x}^p)=0$$

$$\text{和}\quad \lambda^q\geqslant 0$$

这个过程来自 kuhn-Tucker 条件，它要求 λ 非负且在最优点满足互补松弛条件。对于有效约束

$$\mathbf{A}^q\mathbf{x}^p-\mathbf{b}=0,\quad \lambda^q\geqslant 0$$

而对非有效约束，λ 的相应分量等于零。

习题与题解

7-1 对于问题

$$\min x_1^2+x_2^2$$

$$\text{且使}\quad 3x_1+2x_2\geqslant 6$$

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0$$

使用跟踪算法，从初始可行点(2, 3)开始。

[**解**] 梯度是

$$\nabla f(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}2x_1\\2x_2\end{bmatrix},\quad \nabla g(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$$

当$\mathbf{x}^p$ 是可行点时，算法是

$$x^{p+1}=x^p-\frac{h_p}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

当x^p是非可行点时，

$$x^{p+1}=x^p+\frac{h_p}{13}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$$

如图 7-6 所示，这个算法收敛到最小点$\left(\frac{18}{13}, \frac{12}{13}\right)$。

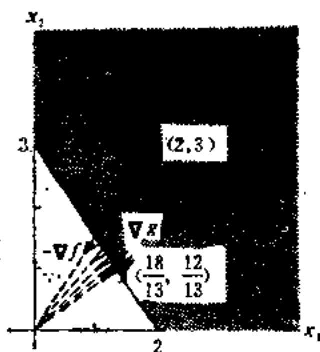


图 7-6

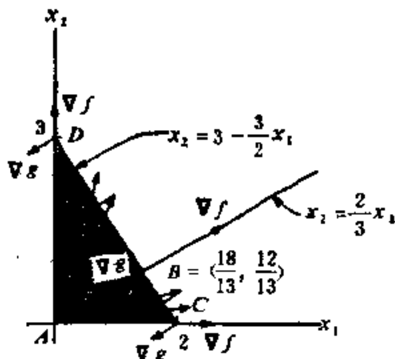


图 7-7

7-2　对于问题

$$\max x_1^2+x_2^2$$

$$\text{且使}\quad 6-3x_1-2x_2\geqslant 0$$

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0$$

从初始可行点(0, 0)开始使用锁边法。这个方法能收敛到极大点吗？

［解］　这个初始可行点的梯度是$[0, 0]^T$，算法得不到新的点，即$x^{p+1}=x^p$。因此由图 7-7 可知，锁边法并不能

收敛到极大点(0，3)。产生这个结果的原因在于，我们是在一凸集上求一凸函数的极大，而锁边算法是用于求这种函数的极小。

如果我们在直线 $x_2=\frac{2}{3}x_1$ 上取初始可行点，则算法收敛到点 $\left(\frac{18}{13},\ \frac{12}{13}\right)$，在这里

$$\nabla f\left(\frac{18}{13},\ \frac{12}{13}\right)=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix},\qquad \nabla g\left(\frac{18}{13},\ \frac{12}{13}\right)=\begin{bmatrix}-3\\-2\end{bmatrix}$$

这个点对应着求极小问题的解。若初始可行点是在图 7-7 的三角形 ABC 中，则算法收敛到局部极大(2,0)；若初始可行点在三角形 ABD 中，则算法收敛到全局极大(0，3)。

7-5 对问题

$$\min x_1^2+x_2^2$$

$$\text{且使}\quad g(\mathbf{x})=9-x_1x_2\leqslant 0$$

求多梯度累加法在点(2，4.5)的方向。

［解］ 在点 $\hat{\mathbf{x}}=(2，4.5)^T$处，有

$$\nabla f(\hat{\mathbf{x}})=\frac{1}{2\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\begin{bmatrix}2x_1\\2x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.405\\0.913\end{bmatrix}$$

$$\nabla g(\hat{\mathbf{x}})=\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\begin{bmatrix}-x_2\\-x_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.918\\-0.408\end{bmatrix}$$

因此，负梯度方向是

$$-\mathbf{d}=\begin{bmatrix}0.513\\-0.505\end{bmatrix}$$

这个向量如图 7-8 所示。

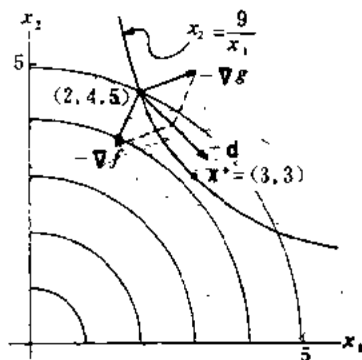


图 7-8

7-4 对问题

$$\max\ x_1^2+2x_2^2$$

$$\text{且使}x_1^2+x_2^2\leqslant 9$$

求多梯度累加法在点(1.67, 2.5)的方向。

［解］ 在点$\hat{\mathbf{x}}=[1.67,\ 2.5]^T$处，有

$$\nabla f(\hat{\mathbf{x}})=\frac{1}{2\sqrt{x_1^2+4x_2^2}}\begin{bmatrix}2x_1\\4x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.316\\0.947\end{bmatrix}$$

$$\nabla g(\hat{\mathbf{x}})=\frac{1}{2\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\begin{bmatrix}2x_1\\2x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.555\\0.830\end{bmatrix}$$

对于求极大问题，

$$\mathbf{d}=\frac{\nabla f(\mathbf{x})}{\|\nabla f(\mathbf{x})\|}-\frac{\nabla g(\mathbf{x})}{\|\nabla g(\mathbf{x})\|}$$

所以

$$\mathbf{d}=\begin{bmatrix}0.316\\0.947\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0.555\\0.830\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.239\\0.117\end{bmatrix}$$

这个向量如图 7-9所示。

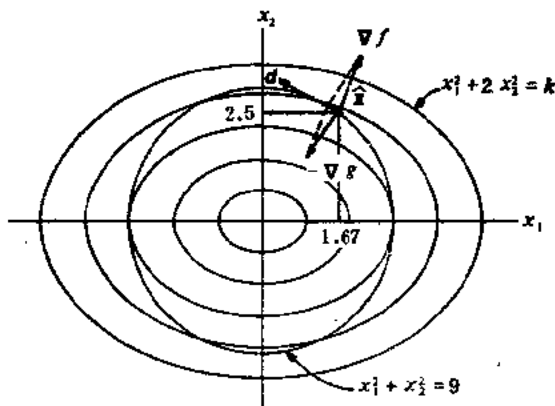


图 7-9

7-5 用可行方向法解问题

$$\min[-\ln(1+x_1)-2\ln(1+x_2)]$$

$$\text{且使}\quad g_1(\mathbf{x})=x_1+x_2-2\leqslant 0$$

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0$$

从初始可行点$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$开始。

［解］ 在初始点 $\mathbf{x}^0=\left[\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]^T$处，有

$$g(\mathbf{x}^0)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-2=-1$$

因此 $\mathbf{x}^0$ 是可行域的内点，所以问题

$$\max\ x_0$$

$$(\nabla f(\mathbf{x}^0),\ \mathbf{d}^0)\leqslant -x_0$$

表明

$$\mathbf{d}^0 = -\nabla f(\mathbf{x}^0)$$

即我们循着负梯度路径直到遇到边界。负梯度

$$-\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+x_1} \\ \\ \dfrac{2}{1+x_2} \end{bmatrix}$$

规范化后得到

$$-\nabla f(\mathbf{x}^0) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

沿此方向运动直到遇到约束，得到

$$x_1^1 = \frac{1}{2} + \frac{k_1}{\sqrt{5}}$$

$$x_2^1 = \frac{1}{2} + \frac{2k_1}{\sqrt{5}}$$

$$x_2^1 = 2 - x_1^1$$

由此得出

$$x_1^1 = 0.833$$

$$x_2^1 = 1.167$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

这个路径如图 7-10 所示。为确定 $\mathbf{d}^1$ 我们必须解线性规划问题

$$\max\ x_0$$

$$\begin{aligned} \text{且使}\quad & x_0 + (\nabla f(\mathbf{x}^1),\ \mathbf{d}^1) \leqslant 0 \\ & (\nabla g(\mathbf{x}^1),\ \mathbf{d}^1) \leqslant 0 \\ & d_1^1 \leqslant 1,\ d_2^1 \leqslant 1 \end{aligned}$$

其中

$$\nabla f(\mathbf{x}^1)=\begin{bmatrix}-0.510\\-0.826\end{bmatrix},\quad \nabla g(\mathbf{x}^1)=\begin{bmatrix}0.707\\0.707\end{bmatrix}$$

或

$$\min\ x_0$$

$$\text{且使}\quad d_2\geqslant 1.168x_0-0.595d_1$$

$$d_2\leqslant -d_1$$

$$d_1\leqslant 1,\ d_2\leqslant 1$$

这个问题图解在图 7-11 中，得解

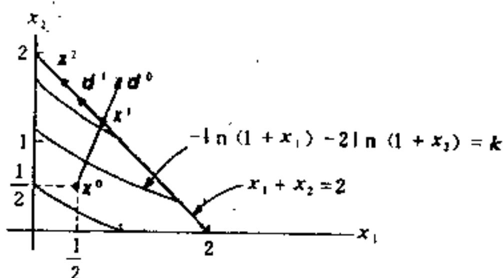


图 7-10

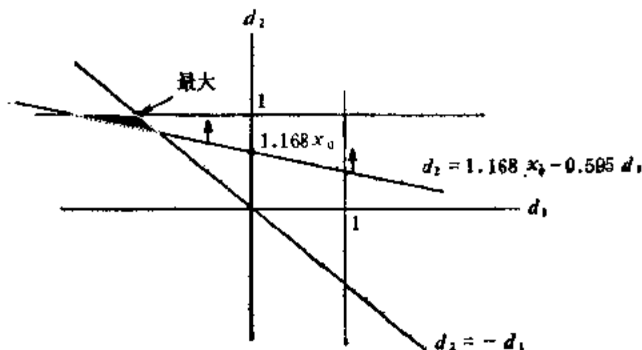


图 7-11

$$\mathbf{d}_1=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix},\quad x_0=0.346$$

现在我们通过解问题

$$\min_k f(\mathbf{x}^1+k\mathbf{d}^1)$$

来确定步长。将 d 规范化，解由必要条件

$$\frac{\partial}{\partial k}[-\ln(1+x_1^1-0.707\,k)-2\ln(1+x_2^1+0.707\,k)]=0$$

给出，得到 $k=0.678$。现在

$$\mathbf{x}^2=\mathbf{x}^1+k\mathbf{d}^1$$

所以

$$x_1^2=0.832-0.707(0.678)=0.35$$

$$x_2^2=1.168+0.707(0.678)=1.65$$

在 $\mathbf{x}^2$ 解线性规划问题，我们看到 $x_0\approx0$，所以点(0.35，1.65)是最优点。

7-6 对问题 7-3 用可行方向法确定点(2，4.5)处的方向。

［**解**］ 线性规划问题为

$$\max\ x_0$$

$$\text{且使}\quad x_0+0.405\,d_1+0.913\,d_2\leqslant0$$

$$x_0-0.918\,d_1-0.408\,d_2\leqslant0$$

$$d_1\leqslant1,\ d_2\leqslant1$$

$$\text{或者}\quad d_2\leqslant-1.095x_0-0.445d_1$$

$$d_2\geqslant2.45x_0-2.25d_1$$

$$d_1\leqslant1,\ d_2\leqslant1$$

从图 7-12 可以看出，当 $d_1=1$ 时 x_0 最大，于是

$$d_2=-1.095x_0-0.445$$

$$d_2=2.45x_0-2.25$$

所以$d_2=-1$，$x_0=0.507$

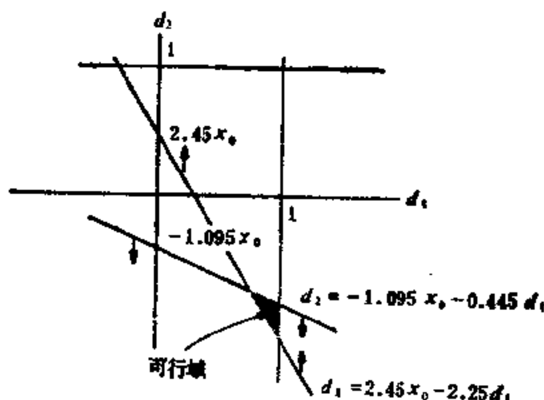


图 7-12

这个方向向量近似等于图 7-8 中的向量，那是由多梯度累加方法得到的。

7-7 用可行方向法解问题

$$\min x_1+2x_2+x_3$$

且使$-6x_1-4x_2-2x_3+3x_1^2+2x_2^2+\frac{1}{3}x_3^2+7.25\leqslant 0$

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0$$

从初始可行点[1，1，3]开始。

[解] 可行方向算法是

$$\mathbf{x}^{p+1}=\mathbf{x}^p+k_p\mathbf{d}^p$$

其中 $\mathbf{d}^p$ 由线性规划

$$\max \mathbf{d}^p x_0$$

$$\text{且使}\quad x_0+(\nabla f(\mathbf{x}^p),\ \mathbf{d}^p)\leqslant 0$$

$$x_0+(\nabla g(\mathbf{x}^p),\ \mathbf{d}^p)\leqslant -g(\mathbf{x}^p)$$

确定，且 $k_p>0$。现在

$$\nabla f(x)=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\quad \Delta g(x)=\begin{bmatrix}-6+6x_1\\-4+4x_2\\-2+\frac{2}{3}x_3\end{bmatrix}$$

从点(1，1，3)开始用这个算法所得的结果由表7-1给出(Wagner，1969)。

表7-1

次数p	f(xᵖ)	x_1^p	x_2^p	x_3^p	d_1^p	d_2^p	d_3^p	k_p
0	6	1	1	3	−1	−1	−1	0.37
1	4.51	0.627	0.627	2.627	1	−0.67	−1	0.29
2	4.17	0.918	0.460	2.336	−1	0.71	−1	0.14
3	4.09	0.781	0.557	2.199	1	−0.21	−1	0.12
4	4.05	0.900	0.532	2.080	−1	−0.83	−1	0.07
5	4.02	0.828	0.594	2.006	1	0.10	−1	0.06
9	4.00	0.869	0.625	1.881	1	0	−1	0.01
10	4.00	0.875	0.625	1.875	——	——	——	——
最优	4	0.875	0.625	1.875				

7-8　求函数

$$f(x)=5x_1-3x_2+6x_3$$

的梯度在 x_1，x_2 平面上的投影，画出梯度和它投影的草图．

［解］　梯度是

$$\nabla f(x)=\begin{bmatrix}5\\-3\\6\end{bmatrix}$$

约束是

$$x_3=0$$

投影矩阵是

$$\mathbf{P}=[\mathbf{I}-\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}]$$

其中 $\mathbf{A}=[0,\ 0,\ 1]$

所以$\mathbf{A}\mathbf{A}^T=[0,\ 0,\ 1]\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=1$

$$(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}=1$$

因此

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}[0,\ 0,\ 1]$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

投影为

$$\mathbf{P}\nabla f(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\-3\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-3\\0\end{bmatrix}$$

梯度和它在 x_1，x_2 平面上的投影如图 7-13 所示。

7-9 对函数

$$f(\mathbf{x})=x_1^2+3x_2^2+2x_3^2$$

重复问题 7-8，在点(1，1，-1)处计值。

［**解**］ 梯度是

$$\nabla f(1,\ 1,\ -1)=\begin{bmatrix}2x_1\\6x_2\\4x_3\end{bmatrix}_{(1,\ 1,\ -1)}=\begin{bmatrix}2\\6\\-4\end{bmatrix}$$

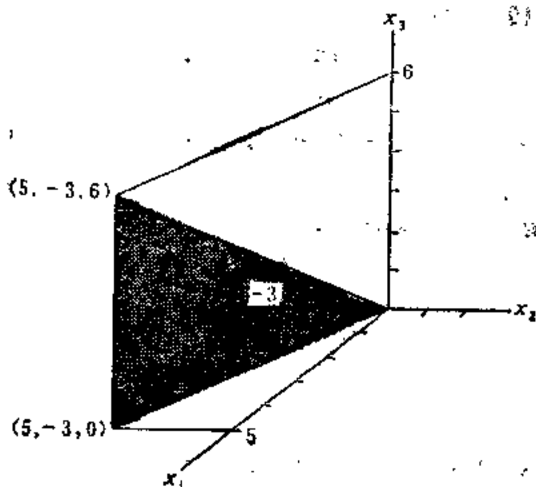


图 7-13

投影矩阵与问题 7-8 相同，因此投影为

$$P\nabla f(1, 1, -1)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 6\\ -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 6\\ 0\end{bmatrix}$$

梯度和它在 x_1，x_2 平面上的投影如图 7-14 所示。

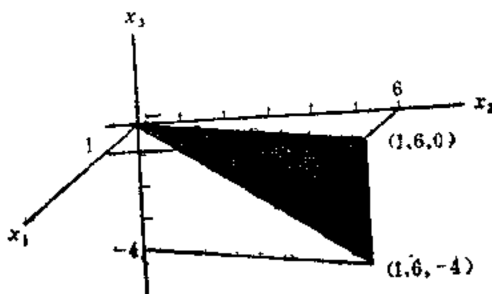


图 7-14

7-10 对问题

$$\min\ 2x_1^2+5x_2^2$$

且使 $x_1+3x_2=6$

从初始可行点(12，－2)开始，用梯度投影法计算两步，步长 $k_p=3$。

［**解**］ 此问题的约束矩阵是

$$\mathbf{A}=[1,\ 3]$$

$$\nabla f(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}4x_1\\10x_2\end{bmatrix}$$

梯度投影算法是

$$\mathbf{x}^{p+1}=\mathbf{x}^p+k_p[\mathbf{I}-\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}]\nabla f(\mathbf{x}^p)$$

其中

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T=[1,\ 3]\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=10$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}=0.1$$

所以投影矩阵是

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}0.1[1,\ 3]$$

$$=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0.1&0.3\\0.3&0.9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.9&-0.3\\-0.3&0.1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}\nabla f(\mathbf{x}^0)=\begin{bmatrix}0.9&-0.3\\-0.3&0.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}48\\-20\end{bmatrix}=16.4\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$$

规范化因子是 $1/(16.4\sqrt{10})$，所以

$$x^1=\begin{bmatrix}12\\-2\end{bmatrix}-\frac{3}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9.15\\-1.05\end{bmatrix}$$

同样可得

$$x^2=\begin{bmatrix}9.55\\-1.052\end{bmatrix}-\frac{3}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6.3\\-0.1\end{bmatrix}$$

如图 7-15 所示，这两个点都满足约束。

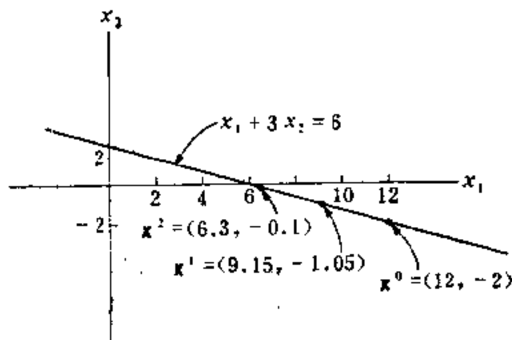


图 7-15

7-11 从点(0, 1)开始用梯度投影法解问题

$$\min[-2x_1-x_2]$$

且使 $g_1(x)=-x_2+1\geqslant0$

$$g_2(x)=-4x_1-6x_2+7\geqslant0$$

$$g_3(x)=-10x_1-12x_2+15\geqslant0$$

$$g_4(x)=x_2-0.5x_1\geqslant0$$

$$x_1\geqslant0,\ x_2\geqslant0$$

［解］ 由于有效约束是 $g_1\geqslant0$ 和 $x_1\geqslant0$，所以初始投影

矩阵是

$$\mathbf{P}=\mathbf{I}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

乘子是

$$\boldsymbol{\lambda}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}$$

这意味着我们可以不管约束 $x_1=0$。去掉这一梯度后，投影矩阵为

$$\mathbf{P}^0=\mathbf{I}-\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}[0,\ -1]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}^0=\mathbf{P}^0\nabla f(\mathbf{x}^0)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ 0\end{bmatrix}$$

现在我们沿 $-\mathbf{d}^0$ 方向运动，直到在点(0.25，1)遇到约束 $g_2(\mathbf{x})=0$。在这个点把 $g_2(\mathbf{x})$的梯度加入 $\mathbf{A}$ 并计算

$$\boldsymbol{\lambda}=\frac{1}{16}\begin{bmatrix}52 & -6\\ -6 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ -4 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ 0.5\end{bmatrix}$$

于是可以不管约束 $g_1(\mathbf{x})=0$ 而沿 $g_2(\mathbf{x})=0$ 投影，现在投影矩阵是

$$\mathbf{P}^1=\mathbf{I}-\begin{bmatrix}-4\\ -6\end{bmatrix}\left(\frac{1}{52}\right)(-4,\ -6)=\frac{1}{13}\begin{bmatrix}9 & -6\\ -6 & 4\end{bmatrix}$$

方向是

$$\mathbf{d}^1=\frac{1}{13}\begin{bmatrix}9 & -6\\ -6 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ -1\end{bmatrix}=\frac{1}{13}\begin{bmatrix}-12\\ 8\end{bmatrix}$$

沿$-\mathbf{d}^1$方向运动，直到在点(0.5,0.834)遇到约束$g_3(\mathbf{x})=0$。在这个点将$g_3(\mathbf{x})$的梯度加入到**A**上，并计算

$$\lambda=\frac{1}{36}\begin{bmatrix}61 & -28\\ -28 & 13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4 & -6\\ -10 & -12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1.08\\ 0.57\end{bmatrix}$$

于是$g_2(\mathbf{x})$可以从投影矩阵中去掉，投影矩阵变成

$$\mathbf{P}^2=\mathbf{I}-\begin{bmatrix}-10\\ -12\end{bmatrix}\left(\frac{1}{244}\right)[-10,\ -12]=\frac{1}{61}\begin{bmatrix}36 & -30\\ -30 & 25\end{bmatrix}$$

新的方向是

$$\mathbf{d}^2=\frac{1}{61}\begin{bmatrix}36 & -30\\ -30 & 25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ -1\end{bmatrix}=\frac{1}{61}\begin{bmatrix}-42\\ 35\end{bmatrix}$$

沿$-\mathbf{d}^2$方向投影，在点(0.938,0.469)遇到约束$g_4(\mathbf{x})=0$。在这个点把$g_4(\mathbf{x})=0$的梯度加到投影矩阵上，并算出

$$\lambda=-\frac{1}{13}\begin{bmatrix}-1.25 & -1\\ -1 & -136\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-10 & -6\\ -0.5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.69\\ 2\end{bmatrix}$$

由于$\lambda\geqslant 0$，最优点达到。投影梯度路径如图7-16所示。

7-12 用梯度投影法解问题

$$\max\left[6x_1+4x_2+2x_3-3x_1^2-2x_2^2-\frac{1}{3}x_3^2\right.$$

且使 $x_1+2x_2+x_3-4\leqslant 0$

从初始可行点(0，0，0)开始。

［解］ 对此问题，

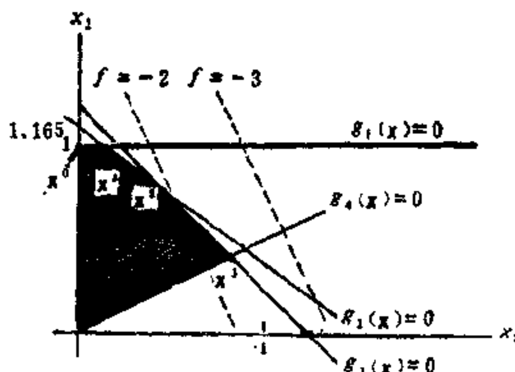


图 7-16

$$\nabla f(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}6-6x_1\\4-4x_2\\2-\frac{2}{3}x_3\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}=[1,\ 2,\ 1]$$

所以 $\mathbf{AA}^T=6$, $(\mathbf{AA}^T)^{-1}=\frac{1}{6}$

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}5&-2&-1\\-2&2&-2\\-1&-2&5\end{bmatrix}$$

用算法

$$\mathbf{x}^{p+1}=\mathbf{x}^p+k_p\mathbf{P}\nabla f(\mathbf{x}^p)$$

所算的各步由表 7-2 给出(Wagner, 1969)。

表7-2

次数p	$f(x^p)$	x_1^p	x_2^p	x_3^p	k_p
0	0	0	0	0	0.1981
1	5.547	1.189	0.793	0.396	0.3667
2	6.537	0.774	1.097	1.033	0.2749
3	6.966	1.060	0.817	1.306	0.3075
4	7.137	0.835	0.813	1.539	0.2749
5	7.205	0.949	0.701	1.648	0.3075
6	7.232	0.859	0.700	1.741	0.2749
10	7.249	0.872	0.637	1.854	0.2749
15	7.249	0.876	0.626	1.873	0.3075
最优	7.25	0.875	0.625	1.875	——

补充题

7-13 用锁边法解问题

$$\max 2x_1+x_2-x_1^2$$

$$\text{且使}\quad 2x_1^2+3x_2^2\leqslant 6$$

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0$$

7-14 用锁边法解问题

$$\max 3x_1+2x_2$$

$$\text{且使}\quad (x_1-2)^2+(x_2-1)^2\leqslant 9$$

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0$$

7-15 用多梯度累加方法解问题7-13。

7-16 用多梯度累加方法解问题7-14。

7-17 用可行方向法解问题7-13。

7-18 用可行方向法解问题7-14。

7-19 用可行方向法解问题

$$\max\ x_1x_2$$

且使 $x_2-x_1-1\leqslant 0$

$2x_2+x_1-6\leqslant 0$

$x_1\geqslant 0$

7-20 用梯度投影法解线性规划问题

$$\max\ 0.5x_1+2x_2$$

且使 $x_1+x_2\leqslant 6$

$x_1-x_2\leqslant 1$

$2x_1+x_2\geqslant 6$

$0.5x_1-x_2\geqslant -4$

$x_1\geqslant 1,\ x_2\geqslant 0$

从初始可行点(3，2)开始。

7-21 写出用梯度投影法解下列问题的各步．问题为

$$\min f(\mathrm{x})$$

且使 $g_i(\mathrm{x})\leqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ r$。

7-22 确定梯度投影法当遇到形式如

$$x_i\leqslant c,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ r$$

的约束时，**P** 矩阵的特殊形式。

7-23 **A** 是$m\times n$维矩阵，为保证梯度投影法中的矩阵($\mathbf{AA}^T$)是非奇异的，试给出 **A** 应满足的条件。

7-24 对问题

$$\min\ x_1^2+x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2$$

且使 $g_1(\mathrm{x})=2x_1+x_2-4=0$

$g_2(\mathrm{x})=5x_1-x_3-8=0$

用梯度投影法进行四次迭代。

7-25 用梯度投影法解问题 7-19。

7-26 对问题

$$\min \ x_1^2+2x_2^2$$

$$\text{且使} \quad 3x_1+x_2\geqslant 2$$

$$x_1+2x_2\geqslant 3$$

用梯度投影法进行四次迭代。

第八章　惩罚函数法

在第七章里我们介绍了两种基本的求解约束最优化问题的方法。第一种方法是设法消去等式约束。第二种方法是，当遇到某一边界时，沿着该边界移动。本章介绍第三种方法。它是利用惩罚函数把约束最优化问题化为无约束问题。这样就可以用处理无约束问题的直接法来求解了。

在第三、四两章中曾经讲过，Lagrange 乘子也可以用来把约束问题转化为无约束问题。本章将阐明使用直接最优化方法的某类惩罚函数与使用间接方法的Lagrange 乘子之间的联系。

一、一类简单的惩罚函数

考虑等式约束问题

$$\min f(\mathbf{x})$$

且使 $g_i(\mathbf{x})=0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$

为了把这个问题转化为一个无约束最优化问题，我们定义新的目标函数

$$P(\mathbf{x};\ \mathbf{K})=f(\mathbf{x})+\sum_{i=1}^{m}K_i[g_i(\mathbf{x})]^2$$

其中正常数($K_i>0$)是指定的参数。在 K_i 从零增加到无穷的过程中，第 i 个约束所起的作用越来越大。当 $K_i=0$时，丝

毫没有考虑这个约束；当 $K_i=\infty$时，则是完全精确地满足这个约束。正的常向量 $\mathbf{K}=[K_1, K_2, \cdots, K_m]^T$ 是由使用者指定的加权因子，它们依赖于使用者认为每一个约束应该满足到什么程度。在大多数问题中，约束是未精确知道的物理现象的数学近似。常数K_i 的选择可以与第 i 个约束的准确程度相当，在目标函数上增添的这些加权项表示对于不满足约束时的惩罚。

例 8-1 下列问题阐明了惩罚常数的应用：

$$\min x_1^2+x_2^2$$

且使 $\quad x_2=1$

［解］ 我们首先定义新的目标函数

$$P(\mathbf{x};\ K)=x_1^2+x_2^2+K(x_2-1)^2$$

函数 $P(\mathbf{x};\ K)$的极小点必须满足

$$\frac{\partial P}{\partial x_1}=2x_1=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2}=2x_2+2K(x_2-1)=0$$

因此 $x_1^*=0$，$x_2^*=K/(1+K)$，如下表所示，当 K 从0增加到 ∞ 时，x_2 的最优值从无约束问题的解移动到约束问题的解：

K	x_2^*
0	0
1	0.5
2	0.67
5	0.83
10	0.91
∞	1

如图 8-1 所示，上表中的每一个 x_2 值都对应于一个问题的解，应该注意到，当 K 增加时，解向边界移动的规律呈现了很强的非线性。

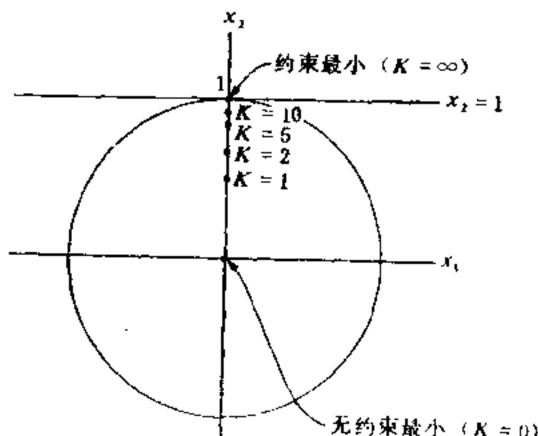


图 8-1

对于例 8-1，我们能够求得最优解关于 K 的解析表达式。但在一般情况下，并不能做到这一点，此时给出一组参数值K 后，需要对 x 进行直接搜索才能确定$P(x,K)$的极小点。对于给定的一组约束，要估计解对于参数 K 变化的敏感程度，需要选几个 K 值的序列进行试算。

为把上述方法用于不等式约束问题

$$\min f(x)$$

$$\text{且使 } g_i(x)\leqslant 0,\ i=1,2,\cdots,r$$

我们定义新的目标函数

$$P(x;\ K)=f(x)+\sum_{i=1}^{r}K_i[g_i(x)]^2u_i(g_i)$$

其中

$$u_i(g_i)=\begin{cases}0, & 当\ g_i(x)\leqslant 0\ 时\\ 1, & 当\ g_i(x)>0\ 时\end{cases}$$

而 $K>0$。阶跃函数 $u_i(g_i)$的作用是，当 x 位于可行域之内时，不考虑相应的约束；当 x 位于可行域之外时，把相应的约束做为等式约束处理。象前边一样，对于给定的值，可以用直接法求目标函数 $P(x,K)$的极小点。

上述不等式约束问题的 Lagrange函数是

$$L(x,\lambda)=f(x)+\sum_{i=1}^{p}\lambda_i g_i(x)$$

指出 $P(x;K)$和 $L(x,\lambda)$之间的联系是很有意思的。

设

$$\lambda_i=K_i g_i(x)u_i(g_i)$$

则有

$$P(x;K)=L(x,\lambda)$$

而且可以证明〔Beltrami,1970〕，当K_i 趋于∞同时 x 相应地趋于某一边界 $g_i(x)=0$ 时，有

$$\lim_{K_i\to\infty}2K_i g_i(x)u_i(g_i)=\lambda_i^*$$

因为$K_i>0$ 而且在可行域外部$g_i(x)u_i(g_i)\geqslant 0$，所以其乘积

$$\lambda_i^*=\lim_{K_i\to\infty}2K_i g_i(x)u_i(g_i)\geqslant 0$$

满足Lagrange 乘子所要求的条件(参看问题 8-3)。因为这类惩罚函数产生的点列是从不可行域收敛到约束问题的解，所以它属于**外点法**。

按照上面对λ_i 的分析可知，即使不满足约束规格(也就是说即使在 x^*处λ^*不存在)，这个惩罚函数法仍能收敛到最优解，从表面上看这里似乎有些矛盾，出现这种情况的原因

在于，约束规格是对一个点(x^*, λ^*)而言的，可是惩罚函数法得到的是一个点列$(x^1, x^2, \cdots, K^1, K^2, \cdots)$，它只是当$K\to\infty$时做为极限收敛到$(x^*, \lambda^*)$

例 8-2

$$\max x_1$$

且使
$$g_1(x)=(x_2-2)+(x_1-1)^3\leqslant 0$$
$$g_2(x)=(2-x_2)+(x_1-1)^3\leqslant 0$$
$$g_3(x)=x_1\geqslant 0,\ g_4(x)=x_2\geqslant 0$$

［**解**］ 在问题4-9中曾用Kuhn-Tucker理论研究过这个问题，我们发现在最优点$x^*=[1,2]^T$处并不满足约束规格。现在用惩罚函数法求这个问题的解，令

$$P(x;\ K)=-x_1+K_1[(x_2-2)+(x_1-1)^3]^2u_1(g_1)$$
$$+K_2[(2-x_2)+(x_1-1)^3]^2u_2(g_2)$$
$$+K_3x_1^2u_3(g_3)+K_4x_2^2u_4(g_4)$$

则

$$\frac{\partial P}{\partial x_1}=-1+6K_1[(x_2-2)+(x_1-1)^3](x_1-1)^2u_1(g_1)+6K_2[(2-x_2)+(x_1-1)^3](x_1-1)^2u_2(g_2)+2K_3x_1u_3(g_3)=0 \tag{8.1}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2}=2K_1[(x_2-2)+(x_1-1)^3]u_1(g_1)-2K_2[(2-x_2)+(x_1-1)^3]u_2(g_2)+2K_4x_2u_4(g_4)=0 \tag{8.2}$$

对于第一象限内可行域外部的任意点来说，

$$u_1(g_1)={}_2u(g_2)=1,\ u_3(g_3)=u_4(g_4)=0$$

取$K_1=K_2=K$，由(8.2)式可得

$$4K(x_2-2)=0$$

或

$$x_2{}^*=2$$

而由(8.1)式可得

$$12K(x_1-1)^5=1$$

因此 $$(x_1-1)^5=\lim_{K\to\infty}\frac{1}{12K}=0$$

所以 $$x_1{}^*=1$$

可见即使在点(1，2)不满足约束规格，所得到的还是一组正确的解。

不过使用这种惩罚函数法时需要注意，如果问题的提法不恰当，算法可能收敛到一个虚假的解，例 8-3 说明了惩罚函数法的这个缺点。

例 8-3 求点 x 到原点的距离的极小。x 满足约束

$$g_1(\mathbf{x})=x_1+x_2-1=0$$

$$g_2(\mathbf{x})=x_1+x_2-2=0$$

[**解**] 显然任何一点都不能同时满足上述两个约束，因而此问题无解，然而如果我们不管这一事实而仍用惩罚函数法求解的话，就做出

$$P(\mathbf{x};K)=x_1^2+x_2^2+K(x_1+x_2-1)^2+K(x_1+x_2-2)^2$$

必要条件为

$$\frac{\partial P}{\partial x_1}=2x_1+2K(x_1+x_2-1)+2K(x_1+x_2-2)=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2}=2x_2+2K(x_1+x_2-1)+2K(x_1+x_2-2)=0$$

或
$$x_1+K(2x_1+2x_2-3)=0$$
$$x_2+K(2x_1+2x_2-3)=0$$

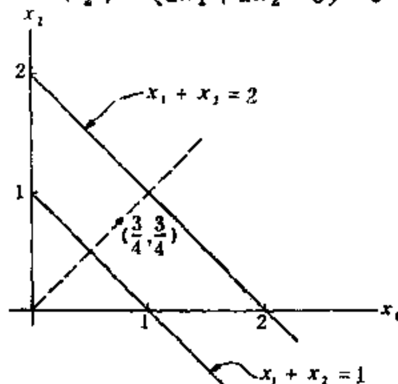


图 8—2

因此

$$x_1^*=x_2^*$$

且

$$x_1^*=\lim_{K\to\infty}\frac{3K}{1+4K}=\frac{3}{4}$$

可见惩罚函数法得到的是虚假的解(0.75,0.75)。从图 8-2 容易看出，它不满足任何一个约束。

函数 $f(x)$ 和 $g_i(x)$为凸函数时，约束曲面是单峰的，因而采用求局部极小点的方法就能获得全局极小点，因为在这些凸性条件之下函数 $P(x;\ K)$也是凸的，所以对惩罚函数来说，上述结论仍然成立。

二、其它惩罚函数

还有一类重要的惩罚函数方法，这类方法所产生的序列是从可行域内部趋向于约束边界的，因而称为**内点法**。本段介

绍的序贯无约束极小化方法(SUMT)是一个典型的内点法。

考虑问题

$$\min f(\mathbf{x})$$

且使 $g_i(\mathbf{x})\geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,r$

我们定义新的目标函数

$$P(\mathbf{x};\ K)=f(\mathbf{x})+K\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{g_i(\mathbf{x})}$$

如果把 K_p 取为一个正的递减序列，那末可以求出 $P(\mathbf{x};K_p)$ 的极小点 $\mathbf{x}(K_p)$。可以证明，当 $p\to\infty$，$K_p\to 0$时，$\mathbf{x}(K_p)\to\mathbf{x}^*$

现在定义

$$R^0=\{\mathbf{x}|\ g_i(\mathbf{x})>0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ r\}$$

$$R=\{\mathbf{x}|\ g_i(\mathbf{x})\geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ r\}$$

并且讲述主要的结果〔Fiacco *and* McCormick,1968〕这个定理的证明已经超出了本书的范围。

定理8-1 若

(1) R^0 是非空的，

(2) $f(\mathbf{x})$和$-g_i(\mathbf{x})(i=1,2,\cdots,r)$是二次可微的凸函数，

(3) 对每个有限值 k，$\{\mathbf{x}|\ f(\mathbf{x})\leqslant k;\ \mathbf{x}\in R\}$是有界集，且

(4) 对每个 $K>0$，$P(\mathbf{x};\ K)$是严格凸的，

则

(1)对于每个 $K_p>0$，函数 $P(\mathbf{x},\ K_p)$在 R^0 上有唯一的极小点 $\mathbf{x}(K_p)\in R^0$，它满足

$$\nabla_x P(\mathbf{x}(K_p);\ K_p)=0$$

(2) $\lim\limits_{p\to\infty} P(\mathbf{x}(K_p;\ K_p)=\min\limits_{\mathbf{x}\in R} f(\mathbf{x})$

因此在一定条件下，求 $P(\mathbf{x};K)$的无约束极小也能解决

约束问题。这个定理导致下列算法：

1. 选取 $x(K_0)=x^0\in R^0$（即严格地在可行域内部的点），并选取 $K_1>0$，置 $p=1$。

2. 从点 $x(K_{p-1})$出发求 $P(x, K_p)$的极小点，得 $x(K_p)$。

3. 当满足最终收敛准则时停止计算。

4. 否则用选定的 $c>1$ 计算

$$K_{p+1}=\frac{K_p}{c}$$

把 p 增加 1，转第 2 步。

在第 2 步中可以使用任何一个能求极小点的算法（例如第六章介绍的梯度算法）。第 2 步中典型的停止计算的收敛准则已在第六章给出。可用于第 3 步的一个最终收敛准则是，当

$$\min P(x;\ K_p)-\min P(x;\ K_{p-1})\leqslant\varepsilon$$

时停止计算，关于指标 p 的迭代过程包含着求 $P(x;K_p)$极小的内迭代。对第 2 步的这个内迭代过程宜于采用较松的收敛准则，即只要$x(K_p)$ 达到相当低的精度就停止计算。从计算角度来说，这样做是有好处的，其原因是梯度算法后期的迭代往往不如前期的迭代那样有效。

收敛速度强烈地依赖于 K_1、c 的值和 $x(K_0)$的值，如果K_1 选得太大，则 p 的迭代要进行很多次才收敛；但如果 K_1 选得太小，第 2 步的内迭代过程可能收敛得很慢，甚至根本就不收敛，为防止出现上述两种情况，应该小心谨慎地选取 K_1 的值（参看问题 8-7 和 8-8）。

例 8-4 用SUMT 方法求解问题

$$\min\frac{1}{3}(x_1+1)^3+x_2$$

且使 $\quad g_1(\mathrm{x})=x_1-1\geqslant 0$

$$g_2(\mathrm{x})=x_2\geqslant 0$$

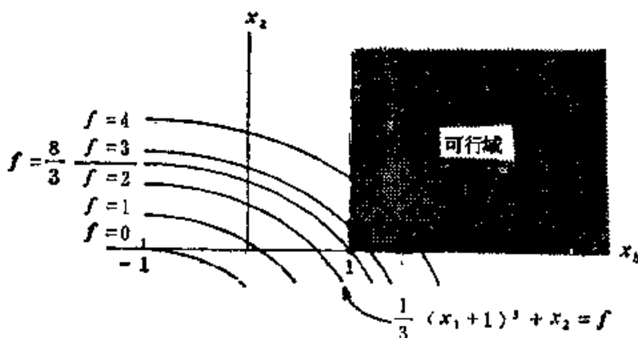


图 8-3

［解］ 从图 8-3 可以看出，最优解在点 $\mathrm{x}^*=[1,\ 0]^T$ 且 $f(\mathrm{x}^*)=\frac{8}{3}$. 按 SUMT 方法，我们定义

$$P(\mathrm{x};K)=\frac{1}{3}(x_1+1)^3+x_2+\frac{K}{x_1-1}+\frac{K}{x_2}$$

必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial x_1}=(x_1+1)^2-\frac{K}{(x_1-1)^2}=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2}=1-\frac{K}{x_2{}^2}=0$$

这两个方程的解是

$$x_1(K)=\sqrt{1+\sqrt{K}}$$

$$x_2(K)=\sqrt{K}$$

因此

$$x^* = \lim_{k \to 0} \left[\sqrt{1+\sqrt{K}},\ \sqrt{K} \right]^T = [1,\ 0]^T$$

这就是最优解

例 8-5 说明 SUMT 算法用于例 8-4 中问题时的迭代步骤，取 $K_1=9$，$c=2$。

［解］ 因为能够解析地求出例 8-4 的解，所以我们不必利用直接极小化算法完成这些迭代步骤，而可借助于 $x(K_p)$ 的显式表达式

$$x(K_p) = \left[\sqrt{1+\sqrt{K_p}},\ \sqrt{K_p} \right]^T$$

来实现。在表 8-1 和图 8-4 中，我们给出了前 11 步迭代的结果。

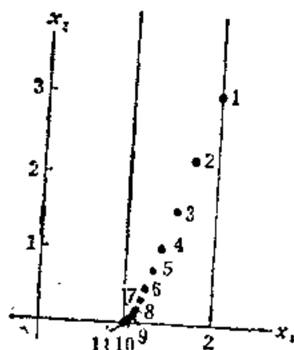


图 8-4

在序贯无约束极小化方法类中，还有另一种惩罚函数是

$$P(x;\ K) = f(x) - K\sum_{i=1}^{r} \ln g_i(x)$$

其中 $K>0$，我们称它为**对数惩罚函数**。

表 8-1

p	K_p	$X_1(K_p)$	$X_2(K_p)$
1	9.	2.	3.
2	4.5	1.788	2.12
3	2.25	1.581	1.50
4	1.125	1.439	1.06
5	0.563	1.322	0.752
6	0.282	1.229	0.503
7	0.141	1.170	0.376
8	0.071	1.120	0.257
9	0.036	1.091	0.190
10	0.018	1.062	0.134
11	0.009	1.047	0.095

例 8-6 用对数惩罚函数求解问题

$$\min \ x_1+2x_2$$

且使
$$g_1(x)=-x_1^2+x_2\geqslant 0$$
$$g_2(x)=x_1\geqslant 0$$

［解］ 目标函数是

$$P(x;\ K)=x_1+2x_2-K\ln(-x_1^2+x_2)-K\ln(x_1)$$

必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial x_1}=1+\frac{2Kx_1}{-x_1^2+x_2}-\frac{K}{x_1}=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2}=2-\frac{K}{-x_1^2+x_2}=0$$

解这两个方程得

$$x_1(K)=\frac{1}{8}\left(-1+\sqrt{1+16K}\right) \tag{8.3}$$

$$x_2(K)=\frac{1}{64}\left(-1+\sqrt{1+16K}\right)^2+\frac{1}{2}K \tag{8.4}$$

于是有

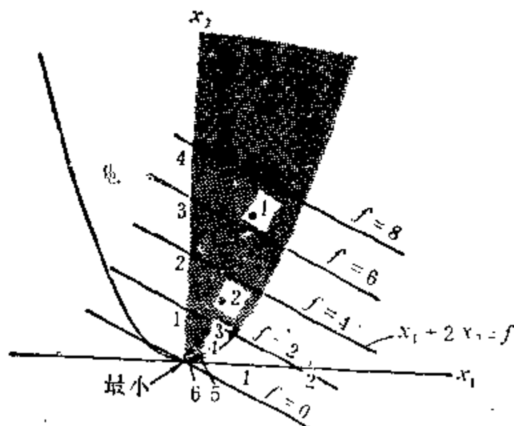


图 8-5

$$x^* = \lim_{K \to 0} [x_1(K), x_2(K)]^T = [0, 0]^T$$

如图 8-5 所示，它是问题的最优解。

例 8-7 说明对数惩罚函数用于例 8-6 时的迭代步骤。取 $K_1=4$，$c=2$。

〔解〕 用(8.3)、(8.4)两式计算的迭代结果已在表 8-2 和图8-5中给出。

表8-2

P	K_P	$X_1(K_P)$	$X_2(K_P)$
1	4.	0.885	2.781
2	2.	0.593	1.350
3	1.	0.391	0.653
4	0.5	0.375	0.390
5	0.25	0.155	0.140
6	0.125	0.090	0.071
7	0.063	0.057	0.035
8	0.032	0.029	0.017
9	0.016	0.016	0.008
10	0.008	0.008	0.004
11	0.004	0.003	0.002

习题与题解

8-1 用惩罚函数 $K[g(\mathbf{x})]^2$ 求解问题

$$\min\ x_1^2+2x_2^2$$

$$\text{且使 } g(\mathbf{x})=1-x_1-x_2\leqslant 0$$

[解] 新的目标函数是

$$P(\mathbf{x};\ K)=x_1^2+2x_2^2+K(1-x_1-x_2)^2u(g)$$

如果 $u(g)=0$，无约束的解是(0,0)，它不是可行点；因此 $u(g)=1$。于是必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial x_1}=2x_1-2K(1-x_1-x_2)=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2}=4x_2-2K(1-x_1-x_2)=0$$

此时有
$$x_1=2x_2=\frac{2K}{2+3K}$$

所以
$$x_1^*=\lim_{K\to\infty}\frac{2K}{2+3K}=\frac{2}{3}$$

$$x_2^*=\frac{1}{3}$$

8-2 考虑等式约束问题

$$\min\ x_1^2+x_2^2$$

且使
$$g(\mathbf{x})=x_2^2-(x_1-1)^3=0$$

试说明即使不存在最优的 Lagrange 乘子，惩罚函数 $K[g(\mathbf{x})]^2$ 仍能获得上述问题的最优解。

[解] 观察图 8-6 可知，最优解在点(1, 0)，在第三章中我们讲过，如果在点(1, 0)处约束的 Jacobi 矩阵秩为 1，

才存在Lagrange 乘子，但

$$\nabla g(1,\ 0)=\begin{bmatrix} -3(x_1-1)^2 \\ 2x_2 \end{bmatrix}_{1,0}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

其秩是 0，所以不存在最优的Lagrange 乘子。

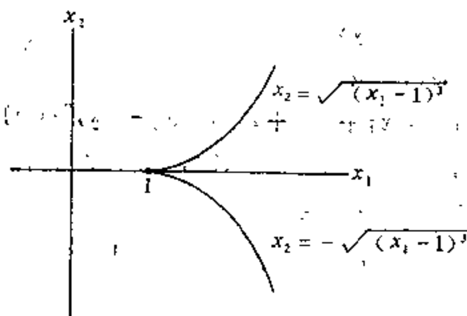


图 8-6

按惩罚函数方法，目标函数是

$$P(x;\ K)=x_1^2+x_2^2+K[x_2^2-(x_1-1)^3]^2$$

必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial x_1}=2x_1-6K(x_1-1)^2\left[x_2^2-(x_1-1)^3\right]=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2}=2x_2+4Kx_2\left[x_2^2-(x_1-1)^3\right]=0$$

把这两个方程改写成

$$(x_1-1)^2\left[x_2^2-(x_1-1)^3\right]=\frac{x_1}{3K}$$

$$x_2\left[x_2^2-(x_1-1)^3\right]=-\frac{x_2}{2K}$$

再令 $K\to\infty$ 取极限，我们就能得知

$$x_1^*=1,\qquad x_2^*=0$$

这是问题的最优解。

8-3 考虑问题

$$\min x_1^2+x_2^2$$

且使

$$g_1(\mathrm{x})=3x_1+2x_2-6\geqslant 0$$

$$g_2(\mathrm{x})=x_1\geqslant 0$$

$$g_3(\mathrm{x})=x_2\geqslant 0$$

试证

$$\lambda_1^*=\lim_{K_1\to\infty}2K_1g_1(\mathrm{x})u_1(g_1)$$

[解] Lagrange 函数是

$$L(\mathrm{x},\lambda)=x_1^2+x_2^2+\lambda_1(3x_1+2x_2-6)+\lambda_2x_1+\lambda_3x_2$$

Kuhn-Tucker 条件为

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=2x_1+3\lambda_1+\lambda_2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=2x_1+2\lambda_1+\lambda_3=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}=3x_1+2x_2-6\geqslant 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}=x_1\geqslant 0,\qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda_3}=x_2\geqslant 0$$

$$\lambda_1(3x_1+2x_2-6)=0$$

$$\lambda_2x_1=0,\qquad \lambda_3x_2=0$$

满足这些条件的最优的(x，λ)值为

$$\mathrm{x}^*=\left[\frac{18}{13},\ \frac{12}{13}\right]^T,\qquad \lambda^*=\left[-\frac{12}{13},\ 0,0\ \right]^T$$

使用惩罚函数方法，新的目标函数为

$$P(\mathrm{x};\mathrm{K})=x_1^2+x_2^2+K_1(3x_1+2x_2-6)^2u_1(g_1)$$

$$+K_2 x_1^2 u_2(g_2)+K_3 x_2^2 u_3(g_3)$$

对于在第一象限内但在可行域之外的x_1, x_2来说

$$u_1(g_1)=1, \qquad u_2(g_2)=u_3(g_3)=0$$

因而必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial x_1}=2x_1+6K_1(3x_1+2x_2-6)=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2}=2x_2+4K_1(3x_1+2x_2-6)=0$$

解这两个方程，我们得到

$$x_1(K_1)=\frac{36K_1}{2+26K_1}, \quad x_2(K_1)=\frac{24K_1}{2+26K_1}$$

所以$x^*=\lim\limits_{K_1\to\infty}\Big(x_1(K_1),\ x_2(K_1)\Big)=\left[\frac{18}{13},\ \frac{12}{13}\right]^T$

且$2K_1 g_1(x)=2K_1\left[3\left(\frac{36K_1}{2+26K_1}\right)+2\left(\frac{24K_1}{2+26K_1}\right)-6\right]$

$$=\frac{-24K_1}{2+26K_1}$$

于是

$$\lambda_1^*=\lim_{K_1\to\infty}\left(\frac{-24K_1}{2+26K_1}\right)=-\frac{12}{13}$$

这就是所要证明的。

8-4　用惩罚函数$K/g(x)$求解问题

$$\min\ x$$

且使　　$0\leqslant x\leqslant 1$

［解］　首先把问题改写为

$$\min\ x$$

且使　　$x\geqslant 0, \qquad 1-x\geqslant 0$

新的目标函数是

$$P(x;\ K)=x+\frac{K}{x}+\frac{K}{1-x}$$

其必要条件为

$$\frac{\partial P}{\partial x}=1-\frac{K}{x^2}+\frac{K}{(1-x)^2}=0$$

由此可得

$$\frac{x^2(1-x)^2}{1-2x}=K$$

K 趋于零意味着或者 $x^*=0$，或者 $x^*=1$(分别对应于约束极小点和极大点)。为了从中找出真正的解，我们考察在每一点附近 K 的性态，对于 $x=\varepsilon\ll 1$，

$$K=\frac{\varepsilon^2(1-\varepsilon)^2}{1-2\varepsilon}>0$$

而对于 $x=1-\varepsilon$，其中 $\varepsilon\ll 1$时，

$$K=\frac{(1-\varepsilon)^2\varepsilon^2}{2\varepsilon-1}<0$$

因为我们要求 $K>0$，所以极小点是在 $x^*=0$ 处。

8-5　用惩罚函 $K/g(x)$ 数求解问题

$$\min\ x-1$$

$$\text{且使}\qquad x\geqslant 0$$

取 $K_1=1$，$c=10$。对 $p=1,2,3$ 划出 $P(x;\ K_p)$ 的图象。

［解］ 目标函数是

$$P(x;\ K)=x-1+K/x$$

必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial x}=1-\frac{K}{x^2}=0$$

因此　　$x=\pm\sqrt{K}$

为保证当 $K>0$ 时点 $x(K)$ 可行，我们在此式中取正号。

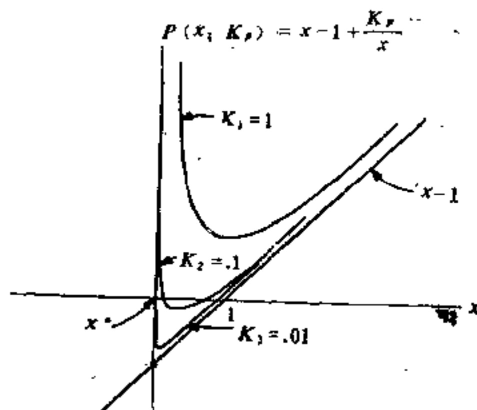


图 8-7

$$显然 x^*=\lim_{K\to 0}\sqrt{K}=0$$

在图 8-7 中划出了当 $K=1, 0.1$ 和 0.01 时目标函数的图象，请注意，无约束目标函数相当于一个严格地在可行域内部上方的曲面。当 K 值减小时，这个曲面是不断变化的，其极小点最终收敛到约束问题的解。

8-6 函数 $f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}^0$ 处的函数值与其极小值之差的一个估值是

$$\nabla f(\mathbf{x}^0)^T H(\mathbf{x}^0)^{-1}\nabla f(\mathbf{x}^0)$$

其中 $H(\mathbf{x}^0)$ 是 Hesse 矩阵，考虑惩罚函数 $K/g(\mathbf{x})$，并设 $\mathbf{x}^0$ 接近于约束边界，试用上述估计式确定 K_1。

［**解**］ 设目标函数是

$$P(\mathbf{x}^0; K_1)=f(\mathbf{x}^0)+K_1 p(\mathbf{x}^0)$$

其中 $$p(\mathbf{x}^0)=\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{g_i(\mathbf{x}^0)}$$

于是对于 $P(\mathbf{x}^0;K_1)$的 Hesse 矩阵为

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{x}^0)+K_1\mathbf{H}_2(\mathbf{x}^0)$$

其中 $\mathbf{H}_1(\mathbf{x}^0)$和 $\mathbf{H}_2(\mathbf{x}^0)$ 分别为 $f(\mathbf{x}^0)$ 和 $p(\mathbf{x}^0)$ 的 Hesse 矩阵。注意到 $p(\mathbf{x}^0)$ 的形式可见，当计算这两个矩阵在接近约束边界处的值时，就得到(在对应元素相比较的意义下)

$$\mathbf{H}_2(\mathbf{x}^0)\gg\mathbf{H}_1(\mathbf{x}^0)$$

略去 $\mathbf{H}_1(\mathbf{x}^0)$，我们选取使得

$$[\nabla f(\mathbf{x}^0)+K_1\nabla p(\mathbf{x}^0)]^T[K_1\mathbf{H}_2(\mathbf{x}^0)]^{-1}[\nabla f(\mathbf{x}^0)$$
$$+K_1\nabla p(\mathbf{x}^0)]$$

取极小值的 K_1，就有

$$K_1=\frac{\nabla f(\mathbf{x}^0)^T\mathbf{H}_2^{-1}(\mathbf{x}^0)\nabla f(\mathbf{x}^0)}{\nabla p(\mathbf{x}^0)^T\mathbf{H}_2^{-1}(\mathbf{x}^0)\nabla p(\mathbf{x}^0)}$$

8-7　对惩罚函数 $K/g(\mathbf{x})$确定一个估计 K_1 的方法。

［解］　因为在最优点 $\nabla_x P(\mathbf{x};K)=0$；所以选择 K_1 的一个方法是使得 $\nabla_x P(\mathbf{x}^0;K_1)$的模取极小值。注意到

$$||\nabla_x P(\mathbf{x}^0;K_1)||=[\nabla_x P(\mathbf{x}^0;K_1)]^T[\nabla_x P(\mathbf{x}^0;K_1)]$$

需使
$$\frac{\partial}{\partial K_1}\Big[\nabla f(\mathbf{x}^0)+K_1\nabla P(\mathbf{x}^0)\Big]^T\Big[\nabla f(\mathbf{x}^0)$$
$$+K_1\nabla P(\mathbf{x}^0)\Big]=0$$

其中
$$p(\mathbf{x}^0)=\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{g_i(\mathbf{x}^0)}$$

因此
$$K_1=\frac{-\nabla f(\mathbf{x}^0)^T\nabla p(\mathbf{x}^0)}{\nabla p(\mathbf{x}^0)^T\nabla p(\mathbf{x}^0)}$$

当 $\mathbf{x}^0$ 不接近于所有的约束边界时，这样估出的 K_1 效果相当好。

补充题

8-8　试用惩罚函数 $K[g(x)]^2$ 求解问题

$$\min\ 3x_1+4x_2^2$$

且使　　　　$x_1 \geqslant 0$

8-9　试用形如$K_i[g_i(x)]^2$ 的惩罚函数求解问题

$$\min\ (x_1-1)^2+(x_2-2)^2$$

且使　　　　$x_2-x_1=1$

$$x_1+x_2 \leqslant 2$$

$$x_1 \geqslant 0, \qquad x_2 \geqslant 0$$

8-10　考虑问题

$$\min\ x_1$$

且使　　$g_1(x)=(x_2-2)+(3-x_1)^2 \leqslant 0$

$$g_2(x)=(2-x_2)+(3-x_1)^3 \leqslant 0$$

试用上述问题说明即使不满足约束规格，惩罚函数$K[g(x)]^2$也能得到最优解。

8-11　导出一个适用于K趋于 1 时收敛的惩罚函数，并用它求解例 8-4。

8-12　试用惩罚函数 $K/g(x)$ 求解问题 8-8。

8-13　试用惩罚函数 $K/g(x)$求解问题 8-9。

8-14　试用惩罚函数$K/g(x)$求解问题 8-10。

8-15　试用惩罚函数$\ln g(x)$求解问题 8-8。

8-16　试用惩罚函数 $\ln g(x)$求解问题 8-9。

8-17　试用惩罚函数 $\ln g(x)$求解问题 8-10。

第九章　二次收敛的极小化算法

本章介绍一类很有效的求函数极小点的直接方法。用 $f(x)$ 表示欲求其极小点的函数。因为 $\max f(x) = -\min[-f(x)]$，所以不失一般性，可以仅限于考虑函数求极小问题。如果一个算法产生的点列 $x^0, x^1, x^2 \cdots$ 满足 $f(x^0) \geqslant f(x^1) \geqslant f(x^2) \cdots$，我们就称该算法为**下降法**。在第六章中已经遇到过一个求极小的下降法的例子，即所谓的**最速下降法或梯度算法**。显然，如果要寻找函数的极小点，我们应该使用这样的算法：它从一次迭代到下次迭代不会使函数值增加。下降法正是满足这一要求的算法。

各个下降法就其收敛速率而言是各不相同的。下降法的收敛速率用比值 $\ln f(x^k)/\ln f(x^{k+1})$ 当 k 趋于无穷时的极限值来度量，其中上标 k 表示所进行的迭代次数。这一极限值称为算法**收敛的阶**。最优梯度算法收敛的阶是 1。我们说收敛的阶是 2 的下降法具有二阶的收敛速率，然而不论其阶如何，绝大多数下降法都不能在有限步内求出函数的极小点(参看例6-4)。即使当目标函数是二次函数时也是如此。然而本章介绍的方法能够在有限步内求出正定二次函数的极小点。

刚才我们引入了收敛的阶的概念，用来做为描述下降法收敛性态的一个标准。还可以提出另外一个标准：即如果一个算法能在有限步内找到正定二次函数的极小点，我们就认为该算法是优良的。当然这个标准并不能揭示把该算法用于一般目标函数时的执行情况如何。然而因为一个连续可微的

二次函数在其极小点附近，总能用二次Taylor 开式近似，所以凡是能够很快地找出二次函数极小点的算法，对于更加一般的函数来说，也会很快地收敛到它的极小点。如果一个算法经有限次迭代就能求出正定二次函数的极小点，我们就称这个算法是**二次收敛**的。

一、二次函数

所谓 E^n上的一个**二次函数**是指

$$f(x_1,\ \cdots,\ x_n)=c+\sum_{i=1}^{n} b_i x_i+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\ \sum_{i=1}^{n} x_j a_{ij} x_i \tag{9.1}$$

其中 c，b_i和a_{ij} 是取常值的标量。用向量矩阵符号我们可把(9.1)改写为

$$f(\mathbf{x})=c+\mathbf{b}^T\mathbf{x}+\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{9.2}$$

其中$\mathbf{b}^T=[b_1,\ \cdots,\ b_n]$，$\mathbf{A}=[a_{ij}]$ 是一个 $n\times n$ 矩阵。不失一般性，可以假定$\mathbf{A}$是对称矩阵。若$\mathbf{A}$是正定的，则我们称(9.2)式给出的$f(\mathbf{x})$是一个**正定二次函数**。

例9-1 考虑两个变量的二次函数

$$f(x_1,\ x_2)=k+dx_1+ex_2+cx_2^2+bx_1x_2+ax_1^2 \tag{9.3}$$

其中a，b，c，d，e和k是取常值的实数，求出 $f(x_1,\ x_2)$为正定的条件，并确定其等值线的形状。

[解] 用向量-矩阵符号，我们可把(9.3)式改写成

$$f(\mathbf{x})=k+[d,\ e]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

$$+\frac{1}{2}[x_1,\ x_2]\begin{bmatrix}2a & b\\ b & 2c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \tag{9.4}$$

这里矩阵A由下式给出

$$A=\begin{bmatrix}2a & b\\ b & 2c\end{bmatrix}$$

若$a>0$，$c>0$且$4ac-b^2>0$，则由Sylvester定理可知A是正定的。因此按照定义$f(x_1,\ x_2)$也是正定的，而$4ac-b^2$是二次函数(9.3)式的判别式。若判别式取正值，则$f(x_1, x_2)=k$(常数)在E^2中的图象是一个椭圆。所以$f(x_1,\ x_2)$的等值线是一族共心椭圆。

例9-2 考虑由(9.3)式给出的二次函数，设$a=d=k=1$，$e=-1$，$b=0$，$e=2$。画出其等值线。

[解] 用配方法可得

$$f(x_1,\ x_2)=1+x_1-x_2+x_1^2+2x_2^2$$

$$=\frac{5}{8}+\left(x_1+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(x_2-\frac{1}{4}\right)^2$$

由此可见$f(x_1,\ x_2)=k$(常数)是一个以$x_1=-\frac{1}{2}$，$x_2=\frac{1}{4}$为中心的椭圆(参看图9-1)，还应注意到$f(x_1,\ x_2)\geqslant\frac{5}{8}$，

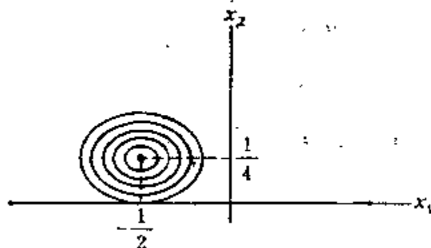


图 9-1

且$f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)=\frac{5}{8}$，即$f(x_1, x_2)$在这族同心椭圆的中心达到其极小值。

例9-3 考虑由式(9.2)给出的二次函数，试证其梯度向量为

$$\nabla f(\mathbf{x})=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b} \tag{9.5}$$

［证］ 为得到$\nabla f(\mathbf{x})$需计算$\partial f/\partial x_k$，$k=1, \cdots, n$。我们可以重新安排一下(9.1)式中各项的次序：

$$f(x_1,\cdots,x_k,\cdots,x_n)=c+\sum_i b_i x_i$$

$$+\frac{1}{2}\left[x_k\sum_j a_{kj}x_j+\sum_{i\neq k}\sum_j x_i a_{ij}x_j\right]$$

$$=c+\sum_i b_i x_i+\frac{1}{2}\left[a_{kk}x_k^2+x_k\sum_{j\neq k}a_{kj}x_j\right.$$

$$\left.+x_k\sum_{i\neq k}x_i a_{ik}+\sum_{i\neq k}\sum_{j\neq k}x_i a_{ij}x_j\right]$$

因为$\mathbf{A}$是对称的(即$a_{ij}=a_{ji}$)，上述方程可变为

$$f(x_1,\cdots,x_k,\cdots,x_n)=c+\sum_i b_i x_i$$

$$+\frac{1}{2}\left[a_{kk}x_k^2+2x_k\sum_{j\neq k}a_{kj}x_j\right.$$

$$\left.+\sum_{i\neq k}\sum_{j\neq k}x_i a_{ij}x_j\right]$$

由此我们得到

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}=b_k+\frac{1}{2}\left[2a_{kk}x_k+2\sum_{j\neq k}a_{kj}x_j\right]$$

$$=b_k+\sum_j a_{kj}x_j$$

这就是我们所要的结果。

例9-4 试证正定二次函数在$\mathbf{x}^*=-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$处达到其唯一的极小值。

［**证**］ 由(9.1)式给出的二次函数$f(\mathbf{x})$是二次连续可微的函数。因此它在由$\nabla f(\mathbf{x})=0$给出的驻点之一达到其极值。因为$\mathbf{A}$正定，行列式$|\mathbf{A}|\neq 0$，由(9.5)式可推知驻点只有一个：$\mathbf{x}^*=-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$。$f(\mathbf{x})$的Hesse矩阵是$\mathbf{A}$，按照假设条件它是正定的，因此$f(\mathbf{x})$在$\mathbf{x}^*=-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$达到其唯一的极小值。

例9-5 考虑例9-2中讨论的二次函数，用例9-4的结论求出其极小点。

［**解**］ 把例9-2给出的a, b和c的数值代入例9-1中$\mathbf{A}$的表达式，可得

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

由此算出

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix},$$

类似地可知$\mathbf{b}=[1,\ -1]^T$，于是用例9-4的结果，我们得到

$$x^*=-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}=-\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}=\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right]^T$$

正如例 9-2 中所指出的，$f(x_1, x_2)$在$x_1^*=-\frac{1}{2}$，$x_2^*=\frac{1}{4}$处达到其极小点。

二、E^n中的共轭方向

设 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 是E^n 中的两个向量，我们曾经说过，如果它们的数量积是零(即$\mathbf{u}^T\mathbf{v}=(\mathbf{u}, \mathbf{v})=0$)，就称它们是**互相正交**的。本章中，我们将常常使用记号$(\mathbf{u}, \mathbf{v})$表示数量积。假设有一个 $n\times n$ 正定对称矩阵$\mathbf{A}$。如果$\mathbf{u}$和$\mathbf{A}\mathbf{v}$ 是相互正交的（即如果$\mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{v}=(\mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{v})=0$），那末我们就说 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 关于 **A 相互共轭**。显然如果 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 是关于单位阵相互共轭，则它们是相互式交的。因此相互正交的概念可以看做向量相互共轭的一个特殊情形。

设$\mathbf{A}$是一个方阵。若向量 $\mathbf{x}\neq0$使得$\mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$，则称 λ 是$\mathbf{A}$的一个特征值，称 $\mathbf{x}$ 为相应的特征向量。根据线性代数的知识，我们知道，若$\mathbf{A}$是正定对称矩阵，且$\mathbf{x}$和$\mathbf{y}$ 是 $\mathbf{A}$ 的两个特征向量，则$\mathbf{x}$和$\mathbf{y}$是相互正交的，即$(\mathbf{x}, \mathbf{y})=0$①。由于 $(\mathbf{y}, \mathbf{A}\mathbf{x})=(\mathbf{y}, \lambda\mathbf{x})=\lambda(\mathbf{y}, \mathbf{x})=0$，因此可以说，正定矩阵$\mathbf{A}$的各特征向量对于 $\mathbf{A}$ 来说是互相共轭的。所以给定一个正定对称矩阵，至少存在一组对于该矩阵来说是相互共轭的向量。为求得给定函数的根小点，我们要介绍的算法将依次沿着 E^n中

①当x和y是对应于不同特征值的特征向量时，这个结论是正确的；当x和y是对应于同一个特征值的特征向量时，这一结论可能不成立，但可以将它们正交化。对应于同一特征值的若干个向量正交化后，仍然是对应于那个特征值的特征向量——译者注。

的一组相互共轭的方向进行一维搜索。然而若 E^n 中的一组相互共轭的向量不能张成E^n，这样做就可能局限在某一个不包含极小点的子空间上搜索。在下例中，我们说明这种情况是不会发生的，其理由是 E^n 中相互共轭的方向构成E^n中的一组基，因而能够张成E^n。②

例9-6 设$\mathbf{A}$为一正定对称矩阵，$\mathbf{u}^i(i=1,\cdots,n)$为$E^n$中一组对于矩阵$\mathbf{A}$相互共轭的方向。试证对任意的向量$\mathbf{x}\in E^n$，有$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{u}^i$，其中$\alpha_i=(\mathbf{u}^i,\mathbf{A}\mathbf{x})/(\mathbf{u}^i,\mathbf{A}\mathbf{u}^i)$，

［证］ 设线性组合$\sum^{n}\alpha_i\mathbf{u}^i$满足

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{u}^i=0$$

则

$$\mathbf{A}\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{u}^i\right]=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{A}\mathbf{u}^i=0$$

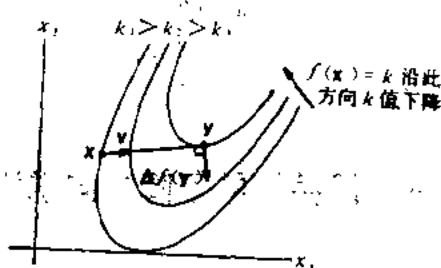


图 9-2

因此，根据给定一组向量的共轭性知

$$\left(\mathbf{u}^k,\ \mathbf{A}\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{u}^i\right]\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\mathbf{u}^k,\ \mathbf{A}\mathbf{u}^i)$$

②确切地说，n个非零的相互共轭的方向能够张成E^n——译者注。

$$=\alpha_k(u^k, Au^k)=0$$

由于 A 是正定矩阵且$u\neq0$,可知$(u^k, Au^k)\neq0$,于是有$\alpha_k=0$, $k=1, \cdots, n$。所以$\{u^i, i=1, \cdots,n\}$是一组线性无关的向量，可以用来做为E^n中的一组基。于是对每一个$x\in E^n$，都存在着唯一的α_i, $i=1, \cdots, n$, 使得

$$x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u^i$$

根据u^i是关于A相互共轭的，可知$(u^i, Ax)=\alpha_i(u^i, Au^i)$，即有$\alpha_i=(u^i, Ax)/(u^i, Au^i)$。

在结束本段时，说一下第六章中所讨论的一维搜索方法的几何意义。设x是E^n中的任一向量，并设v是从x出发的搜索方向，考虑λ的函数$f(x+\lambda v)$，我们要找出使它取极小值的λ^*。图9-2给出了这一问题的几何图象。设$y=x+\lambda^* v$，我们在问题 6-7 中曾证明$(v, \Delta f(y))=0$。这个结论称为**最优下降条件**。在下节中我们将使用这一术语。

三、用共轭的下降方向求极小

现在考察在求极小的下降算法中使用共轭方向的好处。这方面主要的结论由下列定理给出：

定理9-1 若某一求极小的下降算法使用相互共轭的下降方向，则该算法是二次收敛的。

证明：设正定二次函数由式(9.2)给出，$x^0\in E^n$表示极小点$x^*=-A^{-1}b$的任一初始近似点。再设u^i, $i=1, \cdots,n$表示下降方向，我们假定它们是关于 A 相互共轭的。最后设x^i表示x^*的第 i 个近似点，即

$$x^t = x^0 + \sum_{k=1}^{t} \lambda_k u^k$$

我们从x^t出发，沿方向u^{t+1}移动步长λ_{t+1}而达到$x^{t+1} = x^t + \lambda_{t+1} u^{t+1}$，其中$\lambda_{t+1}$是$f(x^t + \lambda u^{t+1})$作为$\lambda$的函数的极小点。这里使用的是第六章曾阐明过的沿$u^{t+1}$寻求局部极小点的一维搜索。从最优下降条件我们有

$$(u^{t+1}, \nabla f(x^t + \lambda_{t+1} u^{t+1})) = 0 \tag{9.6}$$

利用$\nabla f(x)$的表达式(9.5)以及所给向量的相互共轭性，从(9.6)式算出的最优值λ_{t+1}为

$$\lambda_{t+1} = -\frac{(u^{t+1}, Ax^0 + b)}{(u^{t+1}, Au^{t+1})} \tag{9.7}$$

因此

$$\begin{aligned} x^n &= x^0 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u^k \\ &= x^0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(u^k, Ax^0 + b)}{(u^k, Au^k)} u^k \\ &= x^0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(u^k, Ax^0)}{(u^k, Au^k)} u^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{(u^k, A[A^{-1}b])}{(u^k, Au^k)} u^k \\ &= x^0 - x^0 - A^{-1}b = -A^{-1}b = x^* \end{aligned}$$

注意这里在导出x^0和$A^{-1}b$两项时，使用了例9-6所得到的结论。

由定理9-1可知，从任意初始近似x^0出发，都可获得二次收敛性，所需迭代的最大次数，就是$f(x)$中变量的个数

n。还有，不管实际使用u^k时是按怎样的次序，都可得到二次收敛性。

例9-7 考虑例 9-2 和例 9-5 中所讨论的二次函数。用定理 9-1 求这个函数的极小点。

[**解**] 由例 9-5 我们有

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}$$

设$u^1=[1, 0]^T$，$u^2=[0, 1]^T$。可见

$$(u^1, Au^2)=[1, 0]\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$=[1, 0]\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}=0$$

因此u^1和u^2是关于A相互共轭的。我们取$x^0=[0, 0]^T$做为初始近似。由(9.7)式得知$\lambda_1=-1/2$，$\lambda_2=1/4$，于是有

$$x^2=x^0+\lambda_1u^1+\lambda_2u^2=\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]^T=x^*$$

四、共轭方向算法

我们可以对许多众所周知的极小化下降算法(如第六章所介绍的梯度算法)进行修改，使之可以利用下降的共轭方向。为实现这一点，必须建立一个产生共轭方向的方法。但是在计算时往往只有函数值和梯度向量容易算出，所以要使一个算法方便易行，它在产生相互共轭的下降方向时，就应该只使用这些量。特别地，在产生关于矩阵 A(二阶导数) 相互共轭的向量时，不应该要求矩阵 A 的明显信息。满足上述

要求的一个算法是Fletcher-Reeves**共轭梯度算法**。这种算法是对第六章介绍的梯度算法的一个修正。下面我们就来介绍这种算法。

共轭梯度算法

1. 设 x_0 表示 x^* 的初始近似。计算 $\nabla f(x^0)$，并定义 $v^0=-\nabla f(x^0)$。

2. 对$i=1, \cdots, n$执行

(i) 置$x^i=x^{i-1}+\lambda_{i-1}v^{i-1}$,其中$\lambda_{i-1}$使$f(x^{i-1}+\lambda v^{i-1})$作为$\lambda$的函数取极小。

(ii) 计算$\nabla f(x^i)$。

(iii) 当$i<n$时，定义

$$v^i=-\nabla f(x^i)+\frac{\|\nabla f(x^i)\|^2}{\|\nabla f(x^{i-1})\|^2}v^{i-1} \tag{9.8}$$

3. 当终止准则未满足时，用x^n替换x^0，并转回到第一步。

为开始执行这个算法，我们可以采用与梯度方法相同的方式选取初始近似x^0。再者，第六章中介绍的对于梯度算法的终止准则也可以用来停止迭代。在梯度方法中，我们是从x^i出发沿$v^i=-\nabla f(x^i)$求函数的极小而达到x^{i+1}。在共轭梯度法中，我们用增加

$$\frac{\|\nabla f(x^i)\|^2}{\|\nabla f(x^{i-1})\|^2}v^{i-1}$$

的办法修正了梯度方向。当$f(x)$是正定二次函数时，这一修正使得$v^i(i=1, \cdots, n)$是一组相互共轭的向量。在问题9-8中给出了对共轭梯度算法的详细分析。

例9-8 考虑正定二次型$f(\mathbf{x})=\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$，其中

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

试用Fletcher-Reeves共轭梯度法求这一函数的极小点。

［**解**］ 函数$f(\mathbf{x})$的极小点位于E^2中的点$[0,0]^T$处。在第六章例6-4中我们已经知道，除了初始点恰好选在某一坐标轴上的特殊情形外，最优梯度法是不能在有限次迭代内找出这个极小点。由于$f(\mathbf{x})$是二次型，共轭梯度法的收敛性不受初始点位置的影响。所以我们任选一个初始点$\mathbf{x}^0=[10,-5]^T$。

这里$\nabla f(\mathbf{x})=\mathbf{A}\mathbf{x}=[x_1+x_2,\ x_1+2x_2]^T$。按照共轭梯度算法中的第1步，我们定义$\mathbf{v}^0=-\nabla f(\mathbf{x}^0)=-[5,\ 0]^T$。于是有$\mathbf{x}^0+\lambda\mathbf{v}^0=[10-5\lambda,\ -5]^T$，且

$$f(\mathbf{x}^0+\lambda\mathbf{v}^0)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}10-5\lambda, & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10-5\lambda\\ -5\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}[50-75\lambda+50\lambda^2]$$

因为$d^2f(\mathbf{x}^0+\lambda\mathbf{v}^0)/d\lambda^2=50>0$，所以$f(\mathbf{x}^0+\lambda\mathbf{v}^0)$做为$\lambda$的函数，在$\lambda_0=0.75$处达到其极小值，在此处$df(\mathbf{x}^0+\lambda\mathbf{v}^0)/d\lambda=0$。因此$\mathbf{x}^1=\mathbf{x}^0+\lambda_0\mathbf{v}^0=[6.25,-5]^T$，$\nabla f(\mathbf{x}^1)=[1.25,-3.75]^T$。

为使用(9.8)式，需计算$\|\nabla f(\mathbf{x}^1)\|^2/\|\nabla f(\mathbf{x}^0)\|^2$。现在$\|\nabla f(\mathbf{x}^0)\|^2=5^2+0^2=25$，$\|\nabla f(\mathbf{x}^1)\|^2=(1.25)^2+(-3.75)^2=15.55$。于是按照(9.8)式我们有$\mathbf{v}^1=-[1.25,-3.75]^T+(15.55/25)[-5,0]^T=[-4.36,\ 3.75]^T$。象以

前一样，可算得$f(x^1+\lambda v^1)=\frac{1}{2}(26.55-38.95\lambda+14.45\lambda^2)$，它在$\lambda_1=1.34$处达到极小值。

于是我们有 $x^2=x^1+\lambda_1 v^1=[0.4,0.01]^T$。但是对于正定二次型来说，共轭梯度方法最多$n$步就能找到它的极小点，而这里$n=2$，所以从理论上说应当有 $x^2=[0,\ 0]^T$。我们的数值结果$x^2=[0.4,\ 0.01]^T$是接近于$[0,\ 0]^T$的。其间的差别是由于计算中舍入误差的影响。要想得到更好的答案，我们可以用x^2代替x^0，然后重复上述迭代步骤。

例9-9 设 $f(x_1,\ x_2)=x_1^2+2x_2^2$，它可以改写成$f(x)=\frac{1}{2}x^T Ax$，其中

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

试用共轭梯度法求$f(x)$的极小点，阐明进行两次迭代的步骤。

［**解**］ 因为$f(x)$是正定二次型，共轭梯度法的收敛特性不受初始点的影响。于是我们任选$x^0=[5,5]^T$，算出$\nabla f(x^0)=Ax^0=[2x_1^0,\ 4x_2^0]^T=[10,\ 20]^T$。遵照共轭梯度法的第一步，置$v^0=-\nabla f(x^0)=[-10,\ -20]^T$。于是$x^0+\lambda v^0=[5-10\lambda,\ 5-20\lambda]^T$，$f(x^0+\lambda v^0)=\frac{1}{2}(150-1000\lambda+1800\lambda^2)$。因为$d^2f(x^0+\lambda v^0)/d\lambda^2=1800>0$，所以$f(x^0+\lambda v^0)$在$\lambda^0=0.28$处达到极小值，在此处$df(x^0+\lambda v^0)/d\lambda=0$，因而得到$x^1=x^0+\lambda_0 v^0=[2.2,\ -0.6]^T$。

接下去计算出$\nabla f(x^1)=[4.4,\ -2.4]^T$，$\|\nabla f(x^1)\|^2=25.4$，以及$\|\nabla f(x^0)\|^2=500$。遵照共轭梯度法的第二步，置

$$v^1=-\nabla f(x^1)+\frac{\|\nabla f(x^1)\|}{\|\nabla f(x^0)\|^2}v^0$$

$$=-[4.4,-2.4]^T+\frac{25.4}{500}[-10,-20]^T$$

$$=[-4.9,\ 1.4]^T$$

因而$x^1+\lambda v^1=(2.2-4.9\lambda,\ -0.6+1.4\lambda)$，把$f(x^1,\ \lambda v^1)$做为$\lambda$的函数求其极小点，我们得到$\lambda_1=0.44$。由此便得$x^2=x^1+\lambda_1 v^1=[0.05,\ 0.15]^T$。要达到更高的精度，可以用$x^2$代替$x^0$重复上述迭代步骤。

五、用一维搜索产生共轭方向

在共轭梯度法中，为产生下降方向，每次迭代都要计算$\nabla f(x)$。由于$\nabla f(x)$的每一个分量差不多和$f(x)$本身一样复杂，所以每次迭代就相当于计算$n+1$个函数值。Powell创造了另外一个产生共轭方向的方法，它是借助于在每次迭代中进行一维搜索而实现的[Powell，1964]。若x^{i+1}是从x^i出发沿方向v^i进行一维搜索得到的局部极小点，则使用前边规定的最优下降条件可得$(v^i\nabla f(x^{i+1}))=0$。Powell方法是建立在下列观察结果之上的(参看图9-3)：若x^1和x^2是沿同一方向V但从不同基点出发进行一维搜索而得到的两个点，则在二次函数情形，向量x^2-x^1是与v相互共轭的。我们有$(v, A(x^2-x^1))=(v, (g^2-g^1))=0$，这里$g^i=\nabla f(x^i)$，$i=1,\ 2$。基于这一事实，我们可以利用一维搜索产生共轭方向。

Powell 算法

设$\{v^i,\ i=1,\ \cdots,\ n\}$是$E^n$中给定的一组线性无关的向量，并设$x^0$是$x^*$的初始近似。Powell算法由下列五步组成：

1． 对$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$求使$f(x^{i-1}+\lambda v^i)$(做为λ的函

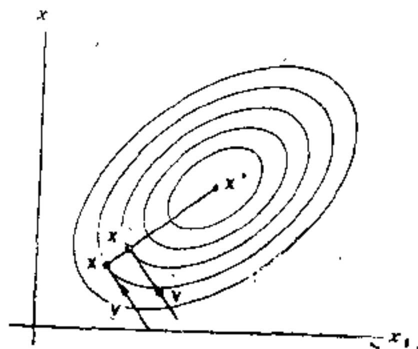


图 9-3

数达到极小的λ_i，并定义

$$x^i = x^{i-1} + \lambda_i v^i$$

2．对$i=1$，…，$n-1$执行用v^{i+1}代替v^i。

3．用$x^n - x^0$代替V^n。

4．求$f(x^n + \lambda(x^n - x^0))$（做为$\lambda$的函数）达到极小的$\lambda_n$，并用$x^0 + \lambda_n(x^n - x^0)$代替$x^0$。

5．若终止准则未满足，则转1。

在开始执行算法时，可以在第一次迭代的循环中用坐标向量做为$\{v^i, i=1, \cdots, n\}$。第六章中所述的任何一个终止准则都可以用来停止本算法的计算。

我们可以把Powell算法看做是一维搜索方法的改进。在一维搜索方法中，每次只变动一个变量而求得给定函数（对这个变量)的一个局部极小点。这等价于沿E^n中的坐标方向进行一系列的一维搜索。Powell的改进在于引进相互共轭的搜索方向，用以代替坐标方向。

例9-10 设$f(x_1, x_2)$是两个变量的正定二次函数，它的等值线是一族以x^*为心的圆(参看图9-4)。假定初始点x^0和初始搜索方向v^1、v^2已在图9-4中给出，试用作图法说明Powell算法应用于$f(x_1, x_2)$时的迭代步骤。

[**解**] 我们进行一维搜索，求得从x^0出发沿方向v^1的局部极小点。因为$f(x_1, x_2)$的等值线是圆，所以极小点在x^1达到，这里线段x^*-x^1与方向v^1正交。

从x^1出发，执行一次沿方向v^2的一维搜索。和前边一样，可知这次是在点x^2处达到局部极小。按照Powell算法，用v^2代替v^1，用$u^1=x^2-x^0$代替v^2。

从x^2出发，沿u^1进行一维搜索，终止于x^3。按照Powell算法，我们从x^3出发沿方向v^2进行一维搜索。这次终止于x^4。从x^4出发沿u^1进行一维搜索到达x^5。在图9-4中可以看

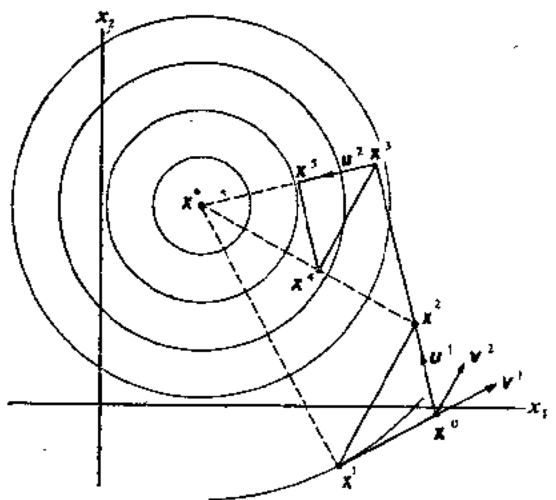


图 9-4

出，x^5和x^3是分别从x^4和x^2出发沿u^1进行一维搜索而得到的点。因此，按照我们前面的观察结论知道，$u^2=x^5-x^3$和u^1是相互共轭的方向。遵照Powell算法，我们用u^1代替v^2，用u^2代替u^1。

现在我们有了两个相互共轭的方向u^1、u^2。因此只要沿u^1和u^2进行一维搜索就应该能找到x^*。如果把x^4看做初始点，那么我们已经沿u^1进行一维搜索而达到了x^5。故再从x^5出发沿u^2进行一次搜索就能到达x^*。

例9-11 考虑例9-9中使用的目标函数$f(x)$，并设$v^1=[1,\ -1]^T$，$v^2=[1,1]^T$。从$x^0=[20,20]^T$出发使用一维搜索的Powell方法，阐明进行两次迭代的过程。

［解］ 遵照Powell方法，我们构造$x^0+\lambda v^1=[20+\lambda,\ 20-\lambda]^T$并计算$f(x^0+\lambda v^1)=\frac{1}{2}[2400-80\lambda+6\lambda^2]$。因为$d^2f(x^0+\lambda v^1)/d\lambda^2=6>0$。做为$\lambda$的函数$f(x^0+\lambda v^1)$在$\lambda_1=6.66$达到极小，在此处$df(x^0+\lambda v^1)/d\lambda=0$。于是得$x^1=x^0+\lambda_1 v^1=[26.66,\ 13.34]^T$。其余的一维搜索可依类似的方式进行，现把所得结果总结如下：

$$\lambda_2=-17.8,\quad x^2=x^1+\lambda_2 v^2=[8186,\ -4.46]^T$$

$$u^1=x^2-x^0=[-11.14,-24.46]^T$$

$$\lambda_3=-0.15,\quad x^3=x^2+\lambda_3 u^1=[10.48,\ -0.92]^T$$

$$\lambda_4=-3.46,\quad x^4=x^3+\lambda_4 v^2=[7.02,\ -4.18]^T$$

$$\lambda_5=-0.15,\quad x^5=x^4+\lambda_5 u^1=[8.68,\ -0.64]^T$$

$$u^2=x^5-x^3=[-1.8,\ 0.28]^T$$

现在我们检验一下u^1和u^2是否关于**A**相互共轭：

$$(u^1,\ Au^2)=[-11.14,\ -24.46]\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1.8\\ 0.28\end{bmatrix}=3$$

因为$(u^1, Au^2) \neq 0$，所以u^1和u^2不是关于A共轭的。这是由于计算舍入误差的影响。接下去我们从x^5沿u^2进行一维搜索得$x^6 = x^5 + \lambda_6 u^2 = [0.03, 0.7]^T$。但我们本来应有$x^6 = [0,0]^T$。这一误差还是由计算误差所造成。要达到更高的精度，可以用x^6代替x^0，然后重复上述迭代过程。

六、变尺度算法

共轭方向算法比最优步长的梯度算法好，它的好处是在最优点附近收敛较快。如果初始近似点x^0接近于最优点x^*，那么(如图9-5所示)因为$\nabla f(x^0)$差不多与$x^* - x^0$垂直，所以沿$x^* - x^0$搜索(比沿$-\nabla f(x^0)$搜索)收敛得更快。另一类二

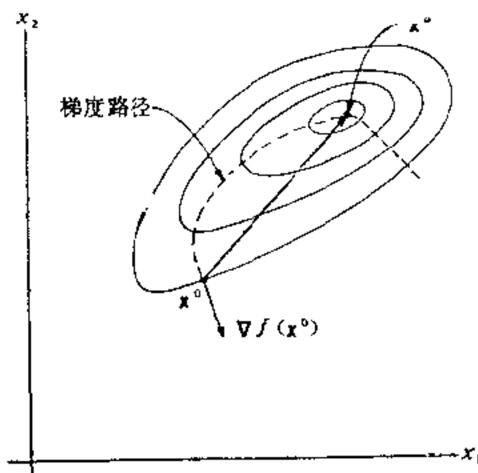


图9-5

次收敛的算法称为**变尺度算法**。为克服接近极小点时的收敛困难，它试图由$\nabla f(x^0)$确定x^*-x^0。这是通过在x^*附近用一系列二次函数近似$f(x)$而实现的。

例9-12 设$f(x)$是二次连续可微函数，其全局极小点为x^*。设x^0是x^*的一个充分小的邻域中的点，试确定$\nabla f(x^0)$和x^0-x^*之间的关系。

［**解**］ 在x^*的邻域内考虑向量值函数$\nabla f(x)$。用一阶Taylor级数展开式，我们近似地有

$$\nabla f(x^0)=\nabla f(x^*)+H(x^*)(x^0-x^*) \qquad (9.9)$$

其中$H(x^*)$是$f(x)$在x^*处的Hesse矩阵。因为$f(x)$在x^*达到极小,所以$\nabla f(x^*)=0$且$H(x^*)$正定,即行列式$|H(x^*)|\neq 0$。①这样就可以把(9.9)式改写为

$$x^0-x^*=H(x^*)^{-1}\nabla f(x^0).$$

或者等价地

$$x^*=x^0-H(x^*)^{-1}\nabla f(x^0) \qquad (9.10)$$

若$f(x)$是由(9.2)式给出的二次函数，则$H(x)=A$，等式(9.10)就变为

$$x^*=x^0-A^{-1}\nabla f(x^0) \qquad (9.11)$$

其中$\nabla f(x^0)=Ax^0+b$，$x^*=-A^{-1}b$。等式(9.11)表明，如果$f(x)$是二次函数，则从任意点x^0出发，不用一维搜索，而只是沿着经过修正的梯度方向$-A^{-1}\nabla f(x^0)$取一个单位的步长,就能达到$x^*=-A^{-1}b$。等式(9.10)有着类似的含义。然而因为(9.10)式使用了$\nabla f(x)$的近似Taylor级数展开,所以它

---

①根据x^*为极小，只能得到$H(x^*)$半正定，$|H(x^*)|\geq 0$。这里的讨论应进一步假设$|H(x^*)|\neq 0$——译者注。

仅仅是近似的结果。这两个等式启发我们去寻找这样的算法，它使用$-\mathbf{P}\nabla f(\mathbf{x})$形式的经过修正的梯度方向，这里$\mathbf{P}$是一个正定对称矩阵。当然，一种可能的选择是取$\mathbf{P}$为$f(\mathbf{x})$的Hesse矩阵的逆。

然而实际上常常出现的情形是，$f(\mathbf{x})$的Hesse矩阵或者根本无法求出，或者计算量很大。而且在数值上计算一个$n\times n$矩阵的逆所需的乘法次数，近似地以n^3的速度增加，所以求逆可能是很费时间的。这样看来，一个实际可行的办法是从一个近似于$\mathbf{H}(\mathbf{x})^{-1}$的矩阵出发，然后每次迭代时对它进行修正。注意，当使用$(\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x})^{1/2}$做为$E^n$中的模或**尺度**(距离，度量)时，$\mathbf{A}^{-1}\nabla f(\mathbf{x})$是由(9.2)式给出的二次函数$f(\mathbf{x})$的梯度。当$f(\mathbf{x})$不是二次函数时，$\mathbf{H}(\mathbf{x})^{-1}\nabla f(\mathbf{x})$有着类似的含义。因此这类经过修正的梯度算法可以认为是在E^n上修改了度量以后的梯度算法。因为我们一次又一次地计算$\mathbf{H}(\mathbf{x})^{-1}$，所以这样的算法称为**变尺度算法**。由Fletcher，Powell和Davidon创造的方法是这类算法中的一个重要算法［参看Fletcher and Powell，1963；Davidon，1959］。

Fletcher-Powell 变尺度算法

设$\mathbf{x}^i$和$\mathbf{H}_i$分别表示在第i次迭代时$\mathbf{x}^*$和Hesse矩阵的逆的近似。为书写方便，我们记$\mathbf{g}^i=\nabla f(\mathbf{x}^i)$。Fletcher-Powell算法由下列四步组成：

1．选择$\mathbf{x}_0$和$\mathbf{H}_0$。

2．对$i=0, 1, \cdots, n-1$定义$\mathbf{x}^{i+1}=\mathbf{x}^i+\lambda_i\mathbf{v}^i$，其中$\mathbf{v}^i=-\mathbf{H}_i\mathbf{g}^i$，而$\lambda_i$是$f(\mathbf{x}^i+\lambda\mathbf{v}^i)$做为$\lambda$的函数的极小点。

3．对$i=0, 1, \cdots, n-1$，令$\mathbf{u}^i=\lambda_i\mathbf{v}^i$，$\mathbf{y}^i=\mathbf{g}^{i+1}-\mathbf{g}^i$。定义

$$\mathbf{H}_{i+1}=\mathbf{H}_i+\mathbf{A}_i+\mathbf{B}_i \tag{9.12}$$

其中

$$A_i=\frac{u^i(u^i)^T}{(u^i)^Ty^i},\ B_i=-\frac{H_iy^i(H_iy^i)^T}{(y^i)^TH_iy^i}$$

4. 若尚未满足终止准则，则令$x^0=x^n$，然后转2。

可以从E^n的任意点x^0出发开始迭代。在第六章中已经介绍了选择一个合适的初始点的方法。我们可以用任何一个正定对称矩阵H_0做为Hesse矩阵的逆的初始近似。一种方便的选法是取主对角线元素为正值的对角矩阵。第六章中介绍的终止准则可以用做这里停止迭代的条件。为了减少计算中舍入误差的影响，一个很好的办法是，每进行n次迭代后就丢弃H_n，用一个新的近似重新开始。Fletcher和Powell已用数值计算阐明，这个算法既优于第六章提到的PARTAN方法，又优于前面介绍的Powell算法。注意，当迭代停止时，当时的H矩阵，作为$f(x)$的Hesse矩阵的逆的近似，可以用于象第六章中所讲述的那样，对$f(x)$拟合一个二次曲面。关于这一算法的进一步的讨论可在问题9-5和9-6中找到。

例9-13 考虑正定二次型$f(x)=\frac{1}{2}x^TAx$，其中

$$A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

试用Fletcher-Powell变尺度算法求其极小点。

［解］ 我们任选$x^0=[10,\ 10]^T$做为极小点的初始估计。Hesse矩阵逆的初始估计用H_0表示，它可以取为任何一个正定对称矩阵。为方便起见，取

$$H_0=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

梯度向量$\nabla f(\mathbf{x})=\mathbf{A}\mathbf{x}=[3x_1-x_2, \ -x_1+x_2]^T$。直接把$x_1^0$和$x_2^0$代入，我们有$\nabla f(\mathbf{x}^0)=[20, \ 0]^T$。遵照Fletcher-Powell算法的第2步，置$\mathbf{v}^0=-\mathbf{H}_0\nabla f(\mathbf{x}^0)=-[20, \ 0]^T$，并得到$\mathbf{x}^0+\lambda\mathbf{v}^0=[10-20\lambda, \ 10]^T$。因此

$$f(\mathbf{x}^0+\lambda\mathbf{v}^0)=\frac{1}{2}[10-20\lambda, \ 10]\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10-20\lambda\\ 10\end{bmatrix}$$

$$=100-400\lambda+600\lambda^2$$

它在$\lambda_0=0.33$处达到关于λ的极小值，故有$\mathbf{x}^1=\mathbf{x}^0+\lambda_0\mathbf{v}^0=[3.34, \ 10]^T$。

遵照 Fletcher-Powell 算法的第3步，我们计算$\nabla f(\mathbf{x}^1)=[0.02, \ 6.66]^T$，$\mathbf{u}^0=\lambda_0\mathbf{v}^0=-[6.6, \ 0]^T$，$\mathbf{y}^0=\nabla f(\mathbf{x}^1)-\nabla f(\mathbf{x}^0)=-[20,-6.66]^T$。于是$(\mathbf{u}^0,\mathbf{y}^0)=132$，$(\mathbf{y}^0, \ \mathbf{H}_0\mathbf{y}^0)=(\mathbf{y}^0, \ \mathbf{y}^0)=443.6$。直接计算便得

$$\mathbf{A}_0=\begin{bmatrix}0.33 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \ \mathbf{B}_0=-\begin{bmatrix}0.9 & -0.3\\ -0.3 & 0.01\end{bmatrix}$$

因此根据(9.12)式我们有

$$\mathbf{H}_1=\mathbf{H}_0+\mathbf{A}_0+\mathbf{B}_0=\begin{bmatrix}0.43 & 0.3\\ 0.3 & 0.99\end{bmatrix}$$

现在从第2步开始进行迭代的第二个循环。置$\mathbf{v}^1=-\mathbf{H}_1\nabla f(\mathbf{x}^1)=-[2.22, \ 6.65]^T$，得到$\mathbf{x}^1+\lambda\mathbf{v}^1=[3.34-2.22\lambda, \ 10-6.65\lambda]^T$。函数$f(\mathbf{x}^1+\lambda\mathbf{v}^1)$在$\lambda_1=1.5$处达到极小，因此有$\mathbf{x}^2=\mathbf{x}^1+\lambda_1\mathbf{v}^1=[-0.01, \ 0.15]^T$。在理论上，我们应该有$\mathbf{x}^2=[0, \ 0]^T$，它就是我们要找的极小点；然而由于计算中

舍入误差的缘故，致使 $x^2 \neq 0$。从第3步开始计算 H_2，就有

$$u^1 = \lambda_1 v^1 = -[3.33,\ 9.85]^T$$

$$\nabla f(x^2) = [-0.18,\ 0.16]^T$$

$$y^1 = \nabla f(x^2) - \nabla(x^1) = -[0.2,\ 6.5]^T$$

$$H_1 y^1 = -[2.036,\ 6.56]^T,\ (u^1,\ y^1) = 64.66,$$

$$(y^1,\ H_1 y^1) = 42.9$$

直接计算可得

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.17 & 0.51 \\ 0.51 & 1.5 \end{bmatrix}, \quad B_1 = -\begin{bmatrix} 0.1 & 0.31 \\ 0.31 & 0.99 \end{bmatrix}$$

于是按照(9.12)式有

$$H_2 = H_1 + A_1 + B_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{bmatrix}$$

可以看出H_2是Hesse矩阵A的精确的逆。

例9-14 考虑目标函数 $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + 2x_2^2)$。它可以改写成$f(x) = \frac{1}{2}x^T A x$，其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

从$x^0 = [4,\ 4]^T$出发用变尺度算法求此函数的极小点，阐明迭代二次的步骤。

［**解**］ 选Hesse矩阵A的逆的初始估计为

$$H_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

遵照变尺度算法的第2步，计算 $\nabla f(x^0) = Ax^0 = [4,\ 8]^T$，置 $v^0 = -H_0 \nabla f(x^0) = -[4,\ 8]^T$。于是$f(x^0 + \lambda v^0) = \frac{1}{2}(48$

$-160\lambda+144\lambda^2)$，它在 $\lambda_0=0.56$ 处达到极小。因此$x^1=x^0+\lambda_0 v^0=[1.76,\ -0.48]^T$。

遵照变尺度算法的第 3 步，计算

$$u^0=\lambda_0 v^0=[-2.24,\ -4.48]^T$$

$$\nabla f(x^1)=[1.76,\ -0.96]^T$$

$y^0=\nabla f(x^1)-\nabla f(x^0)=[-2.24,\ -8.96]^T$，$(u^0,\ y^0)=45$，$(y^0,\ H_0 y^0)=85$。接下去用第 3 步中列出的 A_0和B_0的公式，得知

$$A_0=\begin{bmatrix}0.11 & 0.22\\ 0.22 & 0.44\end{bmatrix}$$

$$B_0=\begin{bmatrix}-0.059 & -0.235\\ -0.235 & -0.94\end{bmatrix}$$

因此用(9.12)式便得

$$H_1=H_0+A_0+B_0=\begin{bmatrix}1.04 & -0.02\\ -0.02 & 0.5\end{bmatrix}$$

现在从$x^1=[1.76,\ -0.48]^T$开始进行迭代的第二个循环。遵照第2步，置 $v^1=-H_1\nabla f(x^1)=[-1.85,\ 0.51]^T$，容易看出$f(x^1+\lambda v^1)$在$\lambda_1=0.94$处达到极小，从而有 $x^2=x^1+\lambda_1 v^1=[0.02,\ -0.001]^T$。遵照第3步算出

$$u^1=\lambda_1 v^1=[-1.78,\ 0.48]^T$$

$$\nabla f(x^2)=[0.02,\ -0.002]^T$$

$$y^1=\nabla f(x^2)-\nabla f(x^1)=[-1.46,\ 0.69]^T,$$

$$H_1 y^1=[-1.86,\ 0.52]^T$$

$$(u^1,\ y^1)=3.51,\ (y^1,\ H_1 y^1)=3.78$$

类似前面的算法，求得A_1和B_1为

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.87 & -0.236 \\ -0.236 & 0.065 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -0.89 & 0.256 \\ 0.256 & -0.066 \end{bmatrix}$$

根据(9.12)式，有

$$H_2 = H_1 + A_1 + B_1 = \begin{bmatrix} 1.02 & 0 \\ 0 & 0.499 \end{bmatrix}$$

正如我们所期望的，H_2是Hesse矩阵A的近似逆阵。

习题与题解

9-1 试证由(9.2)式给出的二次函数在E^n中有一个绝对的或全局的极小点$x^* = -A^{-1}b$。

［证］ 在第二章中曾给出了绝对的或全局的极小点的定义。这里首先注意到$f(x^*) = f(-A^{-1}b) = c - \frac{1}{2}b^T A^{-1} b$。其次我们定义$\phi(x) = \frac{1}{2}(x + A^{-1}b)^T A(x + A^{-1}b)$。因为A正定，所以对所有的$x \neq -A^{-1}b$有$\phi(x) > 0$。另外易见$\phi(x^*) = 0$。我们进一步可以看出

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{2}x^T A x + b^T x + \frac{1}{2}b^T A^{-1} b \\ &= f(x) - c + \frac{1}{2}b^T A^{-1} b \\ &= f(x) - f(x^*) \end{aligned}$$

利用上面指出的$\phi(x)$的性质可断言，对所有的$x \neq x^*$有$f(x) > f(x^*)$。于是按第二章给出的定义，$x = x^*$是$f(x)$的全局极

小点。

9-2　设$\mathbf{A}$是一个$n\times n$正定对称矩阵。$\mathbf{u}^i$，$i=1,\cdots,n$是关于$\mathbf{A}$相互共轭的向量，试证

$$\mathbf{A}^{-1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbf{u}^i(\mathbf{u}^i)^T}{(\mathbf{u}^i)^T\mathbf{A}\mathbf{u}^i}$$

［证］　设$\mathbf{x}$是E^n中任意一个向量。我们定义

$$\mathbf{B}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbf{u}^i(\mathbf{u}^i)^T}{(\mathbf{u}^i)^T\mathbf{A}\mathbf{u}^i}$$

利用例9-6的结果，可知

$$\begin{aligned}\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{x}&=\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbf{u}^i(\mathbf{u}^i)^T}{(\mathbf{u}^i)^T\mathbf{A}\mathbf{u}^i}\right]\mathbf{A}\mathbf{x}\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{(\mathbf{u}^i)^T\mathbf{A}\mathbf{x}}{(\mathbf{u}^i)^T\mathbf{A}\mathbf{u}^i}\mathbf{u}^i\\&=\mathbf{x}\end{aligned}$$

因为对E^n中的每一个向量$\mathbf{x}$都有$\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{x}$，所以$\mathbf{B}\mathbf{A}=\mathbf{I}$，此处表 示$n\times n$阶单位矩阵。因此$\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}$。

9-3　设$f(\mathbf{x})$是正定二次函数，$\mathbf{u}^k$，$k=1,\cdots,n$为相互共轭的方向，假定算法是依次沿$\mathbf{u}^1$，$\mathbf{u}^2$，…搜索的，且每次都选取最优步长。试证对所有的$i(1\leqslant i\leqslant n)$都有

$$(\mathbf{u}^k,\ \nabla f(\mathbf{x}^{i+1}))=0,\ k=1,\ \cdots,\ i$$

［证］　就这一问题，我们应用共轭下降方向算法的一个重要全局性特征。应该注意到，对每一个使用一维搜索的下

降算法来说，在每次迭代中，局部正交条件$(u^i, \nabla f(x^{i+1}))=0$总是满足的。然而$(u^k, \nabla f(x^{i+1}))=0$并不是对每个下降算法必然成立。正如例9-6中所阐明的，向量u^k，$k=1,\cdots,n$是线性无关的；所以对$k=1,\cdots,n$有$(u^k, \nabla f(x^n))=0$意味着$\nabla f(x^n)=0$，即$x^n=x^*$。

在选取最优步长的方法中，x^{k+1}是从x^k出发沿u^k进行一维搜索而得到的。由(9.5)式得知$x^{i+1}=x^{k+1}+\sum_{j=k+1}^{i+1}\lambda_j u^j$，

$$
\begin{aligned}
\nabla f(x^{i+1}) &= Ax^{i+1}+b \\
&= A\left[x^{k+1}+\sum_{j=k+1}^{i+1}\lambda_j u^j\right]+b \\
&= \nabla f(x^{k+1})+\sum_{j=k+1}^{i+1}\lambda_j Au^j
\end{aligned}
$$

因此$(u^k, \nabla f(x^{i+1}))=(u^k, \nabla f(x^{k+1}))$

$$
+(u^k, \sum_{j=k+1}^{i+1}\lambda_j Au^j)
$$

使用最优下降条件，我们有$(u^k, \nabla f(x^{k+1}))=0$；而按所给向量的共轭性有

$$
(u^k, \sum_{j=k+1}^{i+1}\lambda_j Au^j)=\sum_{j=k+1}^{i+1}\lambda_j(u^k, Au^j)=0
$$

因此对所有的$i(1\leqslant i\leqslant n)$有

$$
(u^k, \nabla f(x^{i+1}))=0, \quad k=1, \cdots, i
$$

9-4 试证如果H_i是正定矩阵，则按(9.12)式计算出来

的矩阵H_{i+1}也是正定的。

[证] 因为H_i是正定的,所以存在唯一的正定矩阵G_i使得$(G_i)^2=H_i$。于是由(9.12)式得

$$(x, H_{i+1}x)=(x, H_i x)+\frac{(u^i, x)^2}{(y^i, u^i)}-\frac{(x, H_i y^i)^2}{(y^i, H_i y^i)}$$
$$=\frac{(p^i, p^i)(q^i, q^i)-(p^i q^i)^2}{(q^i, q^i)}+\frac{(u^i, x)^2}{(y^i, u^i)}$$

其中$p^i=G_i x$, $q^i=G_i y^i$。如果对任意的量θ都有 $x\neq\theta y^i$,则 Schwarz 不等式保证上式第一项严格地取正值。这样一来,设$x=\theta y^i$,则因为 $y^i=g^{i+1}-g^i=A(x^{i+1}-x^i)=Au^i$,所以有$x=\theta Au^i$。于是

$$(x, H_{i+1}x)=\theta^2\frac{(u^i, Au^i)^2}{(u^i, Au^i)}=\theta^2(u^i, Au^i)$$

因为A正定,它也是严格地取正值。由此便知H_{i+1}正定。

9-5 对Fletcher-Powell算法验证

$$(u^i, Au^j)=0, \ 0\leqslant i<j<k \tag{9.13}$$

和

$$H_k Au^i=u^i, \ 0\leqslant i<k \tag{9.14}$$

其中$k=0, \cdots, n-1$。

[证] 用归纳法证明。证明中最重要的是归纳步(归纳法的第2步)。假定(9.13)和(9.14)式对k成立,我们需要证明它们对$k+1$也成立。记$g^k=\nabla f(x^k)$,由(9.5)式有

$$g^k=b+Ax^k=b+Ax^{i+1}+A\sum_{j=i+1}^{k-1}u^j=g^{i+1}$$

$$+A\sum_{j=i+1}^{k-1}u^j$$

由归纳假设和每次迭代中的最优下降条件，有

$$(u^i,\ g^k)=(u^i,\ g^{i+1})=0,\ 0\leqslant i<k \tag{9.15}$$

因此$(u^i,\ AH_kg^k)=(H_kAu^i,\ g^k)=(u^i,g^k)=0$；而且因为$\lambda_kH_kg^k=u^k$，有$(u^i,\ Au^k)/\lambda_k=0$，$\lambda_k>0$意味着$(u^i,Au^k)=0$，$(0\leqslant i<k)$。再者$(y^k,\ H_kAu^i)=(y^k,\ u^i)=(u^k,Au^i)=0$，$0\leqslant i<k$。因此$H_{k+1}Au^i=H_kAu^i=u^i$，$0\leqslant i<k$，其中$k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$。

我们由(9.13)式知道向量u^k，$(k=0,\ \cdots,\ n-1)$是关于A相互共轭的，因而线性无关。从(9.15)式可见，g^n与所有的u^k正交，于是$g^n=0$。按我们的定义，Fletcher-Powell算法是二次收敛的。

9-6　在Fletcher-Powell算法中，证明

$$A^{-1}=\sum_{i=0}^{n-1}A_i$$

［证］　从(9.13)式可知u^k是关于A相互共轭的。再者

$$A_i=\frac{u^i(u^i)^T}{(u^i)^Ty^i}=\frac{u^i(u^i)^T}{(u^i)^TAu^i}$$

设
$$B=\sum_{i=0}^{n-1}A^i=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{u^i(u^i)^T}{(u^i)^TAu^i}$$

如问题9-2中所证，对任意的$x\in E^n$，我们有

$$BAx=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(u^i)^TAx}{(u^i)^TAu^i}u^i=x$$

因此$BA=I$，其中I是$n\times n$单位矩阵。遂有$B=A^{-1}$。

9-7 设$f(x)$是由(9.2)式给出的正定二次函数。由(9.8)式给出的经过修正的梯度方向所生成的一组向量记为$v^i, i=1,\cdots,n$。试证$v^i(i=1,\cdots,n)$是关于A相互共轭的。

［证］ 用归纳法证明。我们对归纳步(归纳法的第2步)进行分析，因为它是证明中最重要的。归纳假设是，向量$v^k(k=1,\cdots,i-1)$关于A相互共轭。令$g^i=\nabla f(x^i)$，$v^i=-g^i+\alpha_i v^{i-1}$，其中$\alpha_i$是未知参数。利用问题9-3的结论得知，$(v^k, g^i)=0$对$k=1,\cdots,i-1$和$i=1,\cdots,n-1$成立。因为当$k<i-1$时，$g^i$和$v^{k-1}$正交，我们有$-(g^k, g^i)=(-g^k+\alpha_k v^{k-1}, g^i)=(v^k, g^i)=0$，这里最后一步中的$v^k$是在上面给出的$v^i$的定义中令$i=k$而得到的。注意到$x^{k+1}$是从$x^k$出发沿方向$v^k$移动步长$\lambda_k$而得到的，我们可知$v^k=(1/\lambda_k)(x^{k+1}-x^k)$。利用这个结果可得知，对$k<i-1$有

$$-(v^k, Av^i)=(v^k, Ag^i)=\frac{1}{\lambda_k}(x^{k+1}-x^k, Ag^i)$$

$$=\frac{1}{\lambda_k}(A(x^{k+1}-x^i), g^i)$$

$$=\frac{1}{\lambda_k}(g^{k+1}-g^i, g^i)=0$$

即当$k=1,\cdots,i-2$时，v^i和v^k是关于A相互共轭的。

余下我们还需证明v^i和v^{i-1}是关于A相互共轭的。这一点是根据适当选择未知参数α的值而完成的。由归纳法假设和(9.8)式，我们有$v^{i-1}=-g^{i-1}+\alpha_{i-1}v^{i-2}$，其中$\alpha_{i-1}=$

$\|g^{i-1}\|^2/\|g^{i-2}\|^2$。由于根据问题9-3有$(v^{i-2},g^{i-1})=0$，直接计算可得$-(v^{i-1}, g^{i-1})=\|g^{i-1}\|^2$。可是如果选择$\alpha_i=(g^i, Av^{i-1})/(v^{i-1},Av^{i-1})$,则$v^i$和$v^{i-1}$关于A相互共轭[即$(v^i,Av^{i-1})=0$]。为获得$\alpha_i$的较简单的表达式,我们注意到$(g^i,Av^{i-1})=(1/\lambda_i)\|g^i\|^2$,这里使用了$v^{i-1}=(1/\lambda_i)(x^i-x^{i-1})$和$(v^{i-1}, Av^{i-1})=(1/\lambda_i)\|g^{i-1}\|^2$。

于是α_i有另一表达式$\|g^i\|^2/\|g^{i-1}\|^2$。这就是(9.8)式中使用的值。因此由(9.8)式产生的经过修正的梯度方向，关于A相互共轭。

补 充 题

9-8 对$f(x_1, x_2)=\frac{1}{2}[(x_1^2/a)+(x_2^2/b)], a, b>0$，考虑等值线$C=\{(x_1, x_2)|f(x_1, x_2)=1\}$。该等值线是一个椭圆。证明每个$(x_1, x_2)\in C$与$C$在$(x_1, x_2)$处的切向量共轭，这里共轭是关于正定矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1/a & 0\\0 & 1/b\end{bmatrix}$$

而言的。

9-9 考虑正定二次型$f(x)=\frac{1}{2}(x, Ax)$,其中A是2×2矩阵。设$x^0\neq 0$是E^2中任一向量。设x^1是从x^0出发由最优梯度算法得到的点，x^2是从x^1出发由同一算法得到的点。试证x^0和x^2的连线通过原点。并讨论这一结论用于加速最优梯度算法的可能性。

9-10 设$f(x)=\frac{1}{2}(x, Ax)$是正定二次型，考虑向量序

列

$$x^{k+1}=x^k-\lambda_k v^k$$

其中$v^k=\nabla f(x^k)$。试证若取$\lambda_k=1/\|A\|$，则序列$\{x^k\}$收敛于$f(x)$的极小点。矩阵A的三种模可能的选择是

(a) $\|A\|=(\sum_{i,j}|a_{ij}|^2)^{1/2}$

(b) $\|A\|=\max_i(\sum_j|a_{ij}|)$

(c) $\|A\|=\max_j(\sum_i|a_{ij}|)$

试讨论相应情形下的收敛速率。

9-11 考虑(9.2)式所示的正定二次函数$f(x)$，其中$c=0$，$b=[1,\ -2]^T$，和

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

象例 9-11 那样，用Fletcher-Powell变尺度算法求其极小点。

9-12 考虑$f(x_1,\ x_2)=2x_1^2+2x_1x_2+5x_2^2$，用共轭梯度法进行四次迭代，并与问题6-10的结果作一比较。

9-13 考虑问题9-12中所给的正定二次型，象在例9-8中那样，用 Fletcher-Reeves 共轭梯度法求其极小点。

第十章　二次规划

二次规划的理论，所探讨的是约束函数为线性函数，而目标函数为正定二次函数的极小化问题。因此它是由线性规划理论（见附录）向非线性规划理论的自然过渡。但是，线性规划问题的解与二次规划解之间有着重要的差别。线性规划的最优解如果存在，则它或者是所有可行解组成的集合的极点，或者是这种极点的凸组合（见图 10-1）。而二次规划的最优解不一定是极点，它可以是内点，也可以是非极点的边界点（见图10-2和10-3）。在图10-1，10-2和10-3中，x^* 表示最优解。

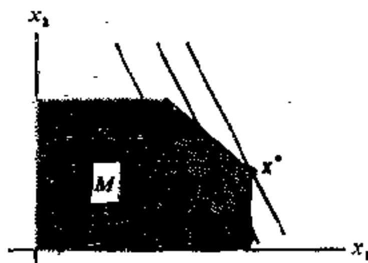


图 10-1

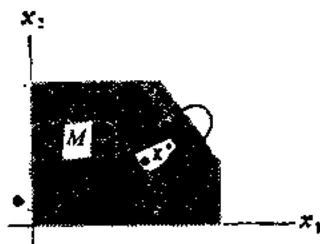


图 10-2

一、等式约束

二次规划最简单的问题是寻求带线性等式约束的正定二

次函数的约束极小。对正定二次函数已在第九章中进行了详细的讨论。它们的等值面是超椭球面，而每个线性等式约束确定一超平面。我们能直观地认为，约束极小位于可行集的边界与极小化超椭球之间的接触点处。这种情况在 E^2 中表示为图10-4，其中过点(0，a)和点(b，0)的直线表示约束超平面，$\mathbf{x}_0$ 和 $\mathbf{x}^*$ 分别表示无约束极小和约束极小。

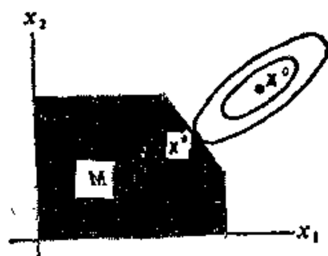


图 10-3

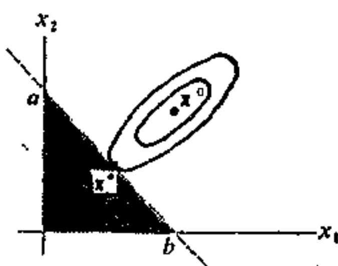


图 10-4

二、可行解

确定所有可行解的集合，存在着三种等价的方法。令 $\mathbf{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\mathbf{c}$ 为 E^m 中的向量。我们用 M 表示所有可行解的集合。则 M 可定义如下

$$M=\{\mathbf{x}\mid \mathbf{x}\in E^n,\ \mathbf{B}\mathbf{x}\leqslant \mathbf{c},\ \mathbf{x}\geqslant 0\} \qquad (10.1)$$

通过引进松弛变量，可用等式来代替(10.1)式中的不等式 $\mathbf{B}\mathbf{x}\leqslant\mathbf{c}$。令 $\mathbf{u}=\mathbf{c}-\mathbf{B}\mathbf{x}$，$y=[\mathbf{x}^T,\mathbf{u}^T]^T$和 $\overline{\mathbf{B}}=[\mathbf{B}\|\mathbf{I}]$。于是系统 $\mathbf{B}\mathbf{x}\leqslant\mathbf{c}$，$\mathbf{x}\geqslant 0$ 与 $\overline{\mathbf{B}}\mathbf{y}=\mathbf{c}$，$\mathbf{y}\geqslant 0$ 等价。为方便起见，用记号 $\mathbf{B}$ 替换 $\overline{\mathbf{B}}$，$\mathbf{x}$ 替换 $\mathbf{y}$，则得 M 的等价定义如下

$$M=\{\mathbf{x}\mid \mathbf{x}\in E^n,\ \mathbf{B}\mathbf{x}=\mathbf{c},\ \mathbf{x}\geqslant 0\}$$

由于(10.1)式中约束 $\mathbf{x}\geqslant 0$ 在 $\mathbf{x}$ 内是线性的，我们可适当扩大矩阵 $\mathbf{B}$ 和向量 $\mathbf{c}$ 来把它们包括在约束 $\mathbf{B}\mathbf{x}\leqslant\mathbf{c}$ 中。这就导出了 M 的另一等价定义

$$M=\{\mathbf{x}\mid \mathbf{x}\in E^n,\ \mathbf{B}\mathbf{x}\leqslant\mathbf{c}\} \tag{10.3}$$

由(10.1)式确定的集合 M 的几何性质在附录中讨论。我们假定极小化的正定二次函数 $f(\mathbf{x})$ 给定为

$$f(\mathbf{x})=b^T\mathbf{x}+\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \tag{10.4}$$

三、Kuhn-Tucker条件

在第四章里，对一般的约束极小问题证明了 Kuhn-Tucker 定理。此定理的假设要求约束函数和目标函数在 $\mathbf{x}$ 内部是凸的。这里，约束函数在 $\mathbf{x}$ 内是线性的，因而是凸的，并且由于(10.1)式中 $f(\mathbf{x})$ 的 Hesse 矩阵 $\mathbf{A}$ 是正定的，所以 $f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}$ 内也是凸的。我们能把 Kuhn-Tucker 定理应用于二次规划问题。

首先考虑由(10.1)式确定的 M 集合的情况。我们引进向量 $\boldsymbol{\lambda}\in E^m$ 和 $\boldsymbol{\mu}\in E^n$ 作为 Lagrange 乘子。令 $\mathbf{x}^*$、$\boldsymbol{\lambda}^*$ 和 $\boldsymbol{\mu}^*$ 表示相应变量 $\mathbf{x}$、$\boldsymbol{\lambda}$ 和 $\boldsymbol{\mu}$ 的最优值。令 $\mathbf{y}^*=\mathbf{c}-\mathbf{B}\mathbf{x}^*$。于是这一问题的 Kuhn-Tucker 条件由下列方程表示：

$$\mathbf{B}\mathbf{x}^*+\mathbf{y}^*=\mathbf{c} \tag{10.5a}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^*+\mathbf{B}^T\lambda^*-\mu^*=-\mathbf{b} \tag{10.5b}$$

$$(\mathbf{x}^*,\ \boldsymbol{\mu}^*)+(\boldsymbol{\lambda}^*,\ \mathbf{y}^*)=0 \tag{10.5c}$$

$$\mathbf{x}^*,\ \mathbf{y}^*,\ \boldsymbol{\lambda}^*,\ \boldsymbol{\mu}^*\geqslant 0 \tag{10.5d}$$

其次，假定 M 由(10.2)式给定，于是相应的 Kuhn-Tucker 条件是

$$\mathbf{B}\mathbf{x}^*=\mathbf{c} \tag{10.6a}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^*+\mathbf{B}^T\lambda^*-\mu^*=-\mathbf{b} \tag{10.6b}$$

$$(\mathbf{x}^*,\ \mu^*)=0 \tag{10.6c}$$

$$\mathbf{x}^*,\ \mu^*\geqslant 0 \tag{10.6e}$$

最后，假定 M 由(10.3)式给定，相应的 Kukn-Tucker 条件为

$$\mathbf{B}\mathbf{x}^*+\mathbf{y}^*=\mathbf{c} \tag{10.7a}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^*+\mathbf{B}^T\lambda^*=-\mathbf{b}, \tag{10.7b}$$

$$(\lambda^*,\ \mathbf{y}^*)=0 \tag{10.7c}$$

$$\lambda^*,\ \mathbf{y}^*\geqslant 0 \tag{10.7d}$$

四、约束对极小化问题的影响

在第九章里，我们讨论了由(10.4)式给定的 $f(\mathbf{x})$ 的无约束极小化问题。现在我们研究线性约束对这问题解的影响。假定 M 由(10.3)式给定，令 $\mathbf{x}^0$ 表示由(10.4)式给定的 $f(\mathbf{x})$ 的无约束极小。于是由第九章可知 $\mathbf{x}^0=-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$。令 $\mathbf{x}^*$ 表示由(10.3)式给定的集合 M 上 $f(\mathbf{x})$ 的约束极小。如果 M 非空，由于 $f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}$ 内是严格凸的，则 $\mathbf{x}^*$ 是唯一的。令 $\mathbf{b}^j$ 表示 $\mathbf{B}$ 的第 j 行向量的转置，$j=1,\ \cdots,\ m$，则可以把约束不等式记为 $(\mathbf{b}^j,\ \mathbf{x})\leqslant c_j$，$j=1,\ \cdots,\ m$。我们常把约束 $(\mathbf{b}^j,\ \mathbf{x})\leqslant c_j$ 称为第 j 约束。如果 $(\mathbf{b}^j,\ \mathbf{x})=c_j$，则第 j 约束是**紧约束**，如果 $(\mathbf{b}^j,\ \mathbf{x})<c_j$，则第 j 约束是**非紧的**，如果 $(\mathbf{b}^j,\ \mathbf{x})>c_j$，则 $\mathbf{x}$ 违反第 j 约束。

令 S^* 表示整数集合 $\{1,\cdots,m\}$ 的子集，使对所有的 $j\in S^*$，第 j 约束在 $\mathbf{x}^*$ 处是紧的。然后求解在 S^* 约束下 $f(\mathbf{x})$ 的极小化问题，并以 $\mathbf{x}^*=\mathbf{x}[S^*]$ 来表示这个解(见图10-5和10-6)。

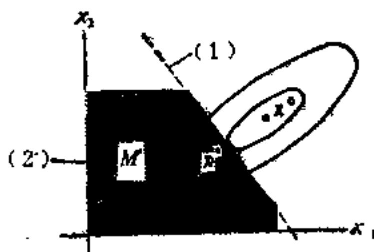


图 10-5

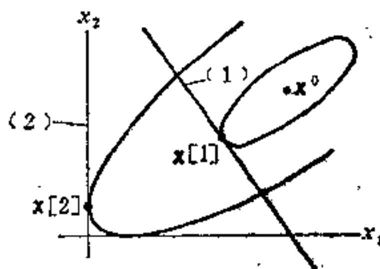


图 10-6

在图10-5中，由(1)表示的约束在 $\mathbf{x}^*$ 是紧的。图 10-6 给出只含约束(1)作为等式约束的极小化问题的解。在这种情形，不考虑其他的约束，并用 $\mathbf{x}[1]$ 表示相应的解。由图 10-5 和 10-6显然可见 $\mathbf{x}[1]=\mathbf{x}^*$。

现在令 S 是整数$\{1, \cdots, m\}$的子集，令 $\mathbf{x}[S]$ 是 $f(\mathbf{x})$ 在 S 约束为紧约束时的极小点。假定 $\mathbf{x}[S]\in M$，任意从集合 S 中去掉一个约束，再进一步考虑在保留下来的约束下极小化 $f(\mathbf{x})$。如果这个问题的解违反刚被去掉的约束，则 $\mathbf{x}[S]=\mathbf{x}^*$。例如，令 $S=\{1\}$，由图10-5和 10-6 可知，

$x[1]\in M$。如果从 S 中去掉约束(1)，则 S 中不包含约束，剩下一个无约束极小化问题。这时问题的解显然违反约束(1)(见图10-6)，因此 $x[1]=x^*$。另一方面，假定 $S=\{2\}$，其中约束(2)如图 10-5 和 10-6 所示。图 10-6 中的$x[2]$是当(2)为紧约束时 $f(x)$的极小。但由这些图明显可见，无约束极小不违反约束(2)。因此 $x[2]\neq x^*$。现令 $x^*=x[S]$，其中 S 是整数$\{1,\cdots,m\}$的某非空子集。令 S_1 是 S 的子集，并令 $x[S_1]$是使 $f(x)$ 在 S_1 约束作为紧约束时的极小。于是 $x[S_1]$至少违反 $S-S_1$ 中的一个约束。在图 10-7 中，$S=\{1,2\}$，$x^*=x[S]$，我们从 S 中除掉约束(2)，即取 $S_1=\{2\}$，那么很清楚 $x[1]$违反约束(2)。

图 10-7

图10-5，10-6和图10-7表明了线性约束对二次规划问题的影响。这一性质的一般结果我们要在问题10-3，10-4和10-5中证明。

五、Theil和 Van de Panne 方法

在前一节中讨论了线性约束对二次规划解的影响。很清

楚，如果在 x^* 处紧约束是已知的，则可以通过求 $f(x)$ 关于这些约束的极小来求 x^*。但是，一般预先并不知道在 x^* 处的紧约束。Theil和 Van de Panne方法通过迭代算法找到这些紧约束[Thejl and Van de Panne, 1961]，它的基本步骤可在上节由观察得出：

1．计算 $x^0=-A^{-1}b$。对所有 $j(1\leqslant j\leqslant m)$，计算$(b^j, x^0)$。得 $V[x^0]=\{j \mid j\in(1, \cdots, m), (b^j, x^0)>c_j\}$。如果 $V[x^0]$是空集，则 $x^0=x^*$，停止迭代；否则转向2。

2．令 k 表示迭代指标，C_k 表示整数集$\{1, \cdots, m\}$的子集 S_k 的集合，每个 S_k 使 $V[x[S_k]]$非空。考虑所有形如 $S_{k+1}=S_k\cup\{k\}$的集合，其中 $k\in V[x[S_k]]$，计算 $x[S_{k+1}]$，得 $V[x[S_{k+1}]]$，转向 3。

3．如果 $V[x[S_{k+1}]]$是空集，则将其指标在 S_{k+1} 中的每个约束轮流丢掉不予考虑，将 S_{k+1} 中保留下来的约束作为等式约束，并使 $f(x)$极小化。如问题的解都违反从S_{k+1}中丢掉的约束，则 $S_{k+1}=S^*$，$x[S_{k+1}]=x^*$，停止迭代；否则得 C_{k+1}，它是使 $V[x[S_{k+1}]]$为非空的那些集合 S_{k+1} 的全体，转向 2。

例10-1　考虑具有图 10-8 所示M集合的二次规划问题，假定正定二次函数的等值线是以 x^0 为中心的圆族。问题是求约束极小 x^*。

［解］　图 10-8 中有五个约束，用(1)，…，(5)表示。令 $V[x]$ 表示为 x 所违反的约束的集合。于是由图 10-8得 $V[x^0]=\{1, 2, 3\}$。令 $S_1=\{1\}$，则 $x[S_1]=a$，$V[a]=\{2, 3\}$。现令 $S_1=\{2\}$，则 $x[S_1]=b$，$V[b]=\{3\}$。类似地，$S_1=\{3\}$ 时有 $x[S_1]=c$，$V[c]=\{1, 2\}$。由于对 S_1的每个选择 $V[x[S_1]]$ 非空，通过步骤 1 还没有找到最优解。

现在设 S_2 为{1，2}，{1，3}，{2，3}中的任意一个。S_2={1，2}时，x[S_2]=u，且由图 10-8 知 V[u]是空集。类似地，当 S_2={2，3}时 x[S_2]=v 且 V[v] 是空集。但是当 S_2={1，3}时，x[S_2]=w，并且从图 10-8 知，V[w] 非空。

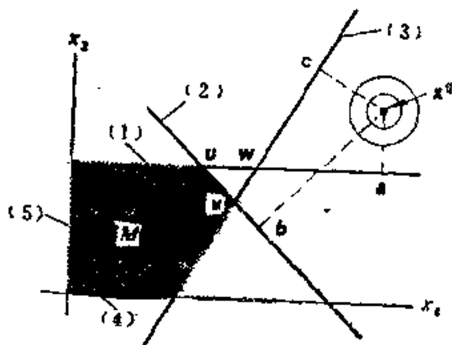


图 10-8

由于 V[v]和 V[u]都为空集，我们必须检验 u 和 v 的最优性。首先检验 u。这里 S_2={1，2}，所以令 $S=S_2-\{1\}$={2}。于是 x[S]=b，由图 10-8 知，b 不违反约束(1)，所以 u 不能是最优解。

其次考虑 v，这里 S_2={2，3}且 $S=S_2-\{2\}=\{3\}$。于是 x[S]=c，违反约束(2)。现令 $S=S_2-\{3\}=\{2\}$，得 x[S]=b，也违反约束(3)。因此 v 满足最优性标准，通过步骤 3 我们得到 x^*=v。

例10-2 考虑二次规划，M 由下列不等式所确定：x_1，$x_2\geqslant 0$，$x_1+x_2\leqslant 3$ 和 $2x_1-x_2\leqslant 4$，如图10-9所示。目标函数 $f(\mathbf{x})=\frac{1}{2}\mathbf{x}^T A\mathbf{x}+\mathbf{b}^T\mathbf{x}$，其中

$$\mathbf{b}=[-2,1]^T \text{和} \mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

用 Theil 和 Van de Panne 方法求约束极小 $\mathbf{x}^*$。

［解］ 首先求 $f(\mathbf{x})$的无约束极小，即得

$$\mathbf{x}^0=-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}=-\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}=[3,1]^T$$

$\mathbf{x}^0$ 的位置如图 10-9 所示。很清楚它违反两个约束 $x_1+x_2\leqslant 3$ 和 $2x_1-x_2\leqslant 4$。如果称 $x_1+x_2\leqslant 3$ 为约束(1)，$2x_1-x_2\leqslant 4$ 为约束(2)，则 $V[\mathbf{x}^0]=\{1,2\}$。取 $S_1=\{1\}$。为了求得 $\mathbf{x}[S_1]$，我们把 Lagrange 函数写为 $L(\mathbf{x},\lambda)=f(\mathbf{x})+\lambda(x_1+x_2-3)$，得

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=x_1-x_2-2+\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=-x_1+2x_2+1+\lambda$$

置$\dfrac{\partial L}{\partial x_1}=\dfrac{\partial L}{\partial x_2}=0$，得 $x_1=3-3\lambda$ 和 $x_2=1-2\lambda$。由于约束(1)现在为紧约束，我们应该选择 λ 使 $x_1+x_2=3$。因此 $\lambda=0.2$ 和 $\mathbf{x}[S_1]=[2.4,0.6]^T$，在图10-9中表示为点 $\mathbf{a}$。很清楚，点 $\mathbf{a}$ 违反约束(2)。

取 $S_1=\{2\}$，利用Lagrange 乘子法，我们得 $\mathbf{x}[S_1]=[2.4,0.8]^T$，在图 10-9 中表示为点 $\mathbf{b}$。类似地，点 $\mathbf{b}$ 违反约束(1)。

由于 $V[\mathbf{a}]=\{2\}$和 $V[\mathbf{b}]=\{1\}$，$\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 都不是最优解。所以我们构造 $S_2=\{1,2\}$并继续计算 $\mathbf{x}[S_2]$。现在 S_2 中的约束都是紧的，由图 10-9 可知，$\mathbf{c}$ 是既满足约束(1)又满足约束(2)的唯一的点。因此，$\mathbf{x}[S_2]=\mathbf{c}=[2.3,0.7]^T$。

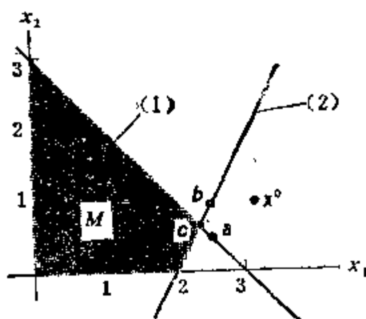


图 10-9

由于c不违反任何约束，它必须受最优性检验。令$S=S_2-\{1\}=\{2\}$，得到$x[S]=b$，它违反约束(1)。类似地，令$S=S_2-\{2\}=\{1\}$，得到$x[S]=a$，它违反约束(2)。因此根据步骤3，$x^*=c=[2.3,0.7]^T$。

六、对偶问题

现在考虑在(10.3)式给定的集合M上由(10.4)式给出的$f(x)$的极小化问题。本节要证明，这一问题的解能通过解另一个简单得多的二次规划来得到。原问题的Kuhn-Tucker条件是由(10.7a-d)给定的，其中假定A为严格正定。于是我们解(10.7b)得到

$$x^*=-A^{-1}(B^T\lambda^*+b) \qquad (10.8)$$

将x^*的表达式代入(10.7a)，得到

$$-BA^{-1}(B^T\lambda^*+b)+y^*=c$$

它可改写为

$$D\lambda^*-y^*=-d \qquad (10.9)$$

其中 $\mathbf{D}=\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T$ 和 $\mathbf{d}=\mathbf{c}+\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$。现在(10.7c)，(10.7d)和(10.9)式是由

$$\min_{\lambda\geq 0}\left(\mathbf{d}^T\lambda+\frac{1}{2}\lambda^T\mathbf{D}\lambda\right)$$

给定的约束极小问题的Kuhn-Tucker 条件。由于这后一个二次规划只有形如 $\lambda\geq 0$ 的约束，解此问题要比解原来的问题简单。它被称为对偶问题，在习题 10-9～10-11 中将要讨论它。如果 λ^* 是这一约束极小化问题的解，则原问题的解 $\mathbf{x}^*$能由(10.8)式得到。

七、Hildreth和D'Espo法

这个方法以解约束极小化问题

$$\min_{\lambda<0}\mathbf{d}^T\lambda+\frac{1}{2}\lambda^T\mathbf{D}\lambda$$

为基础，解出以后再利用(10.8)式求得 $\mathbf{x}^*$。如(10.3)式中的矩阵 B 是行满秩的，则 D 是严格正定的。否则 D 是非负定的。在这两种情形里 D 的对角元素都是正的。Hildreth 和 D'Espo方法是通过使用从 $\lambda=0$ 开始的一维搜索法，解上述约束极小化问题。

1. 计算 $\mathbf{D}=\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T$ 和 $\mathbf{d}=\mathbf{c}+\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$，确定 $g(\lambda)=\mathbf{d}^T\lambda+\frac{1}{2}\lambda^T\mathbf{D}\lambda$，利用 $\nabla g(\lambda)=0$ 得下列关于 $\lambda_j(j=1,\cdots,m)$的线性方程

$$d_i+\sum_{j=1}^{m}d_{ij}\lambda_j=0 \tag{10.10}$$

在(10.10)式中，$i=1,\cdots,m$，d_i 是 d 的第 i 分量，d_{ij}是 D

的第 ij 元素。

2. 令 k 表示迭代指标，通过代入 $\lambda_j=\lambda_j^k(j=1, \cdots, m, j\neq i)$解(10.10)式得 $\hat{\lambda}_i$，由 $\lambda_i^{k+1}=\max(0, \hat{\lambda}_i)$得 λ_i 的新值。

3. 如果 $\lambda^k\neq\lambda^{k+1}$，则转向 2 。否则停止迭代，得到 $\lambda^k=\lambda^{k+1}=\lambda^*$，由(10.8)式知 $\mathbf{x}^*=-\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B}^T\lambda^*+\mathbf{b})$。

例10-3 解下列二次规划问题。其中集合 M 为不等式 $0\leqslant x_1\leqslant 1$ 和 $0\leqslant x_2\leqslant 1$ 所确定：

$$\min_{x\in M} f(\mathbf{x})$$

其中

$$f(x_1, x_2)=\frac{1}{2}[(x_1-2)^2+(x_2-2)^2]$$

［解］ 这问题如图 10-10 所描述。确定 M 的不等式可以改写为 $\mathbf{Bx}\leqslant\mathbf{c}$，其中 $\mathbf{c}=[1, 1, 0, 0]^T$，和

$$\mathbf{B}^T=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

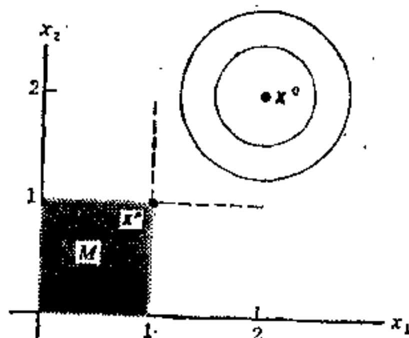


图 10-10

目标函数 $f(\mathbf{x})$ 可以写为 $f(\mathbf{x})=\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}^T\mathbf{x}$，其中

$$\mathbf{b}=[-2,\ -2]^T \text{和} \mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

由直接计算得

$$\mathbf{D}=\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

和

$$\mathbf{d}=\mathbf{c}+\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

$$=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ -2\end{bmatrix}$$

$$=[-1,\ -1,\ 2,\ 2]^T$$

由 $\lambda^0=[0,\ 0,\ 0,\ 0]^T$ 开始一维搜索，对于 $i=1$ 由(10.10)式得

$$-1+\lambda_1-\lambda_3=0$$

取 $\lambda_3=\lambda_3^0=0$ 解此方程，得 $\hat{\lambda}_1$，因此 $\lambda_1^1=\max(0,\ \hat{\lambda}_1)=\max(0,1)=1$。对于 $i=2$，3 和 4 同样地利用(10.10)式，我

们分别有 $\lambda_2^1=1$，$\lambda_3^1=0$ 和 $\lambda_4^1=0$。因此 $\lambda^1=[1,1,0,0]^T$。现在在(10.10)式中利用 $\lambda^1=[1,1,0,0]^T$，使用同样的步骤得到 $\lambda^2=[1,1,0,0]^T$。

由于 $\lambda^1=\lambda^2$，一维搜索已收敛，我们令 $\lambda^*=[1,1,0,0]^T$。现在应用(10.8)式，得到

$$\mathbf{x}^*=-\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B}^T\lambda^*+\mathbf{b})$$

$$=-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\-2\end{bmatrix}\right\}$$

$$=[1,1]^T$$

在图 10-10 中，$f(\mathbf{x})$的等值线为圆族，其中一条经过集合M的边界点$[1,1]^T$。从几何上考虑可知，$f(\mathbf{x})$在M上的极小点是$(1,1)^T$，这也就是我们使用Hildreth 和 D'Espo 方法所求得的答案。

例10-4 设M由不等式 x_1，$x_2\geqslant0$ 和 $3x_1+2x_2\leqslant6$ 所确定，并设$f(\mathbf{x})=\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}^T\mathbf{x}$，其中

$$\mathbf{b}=[-1,0]^T \text{ 和 } \mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}$$

求解问题 $\min\limits_{\mathbf{x}\in M} f(\mathbf{x})$。

[解] 目标函数$f(\mathbf{x})$在

$$\mathbf{x}^*=-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}=-\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}=[1,1]^T$$

有全局极小。注意到 $3x_1^*+2x_2^*=3+2=5\leqslant6$，因为 $\mathbf{x}^*$ 是M

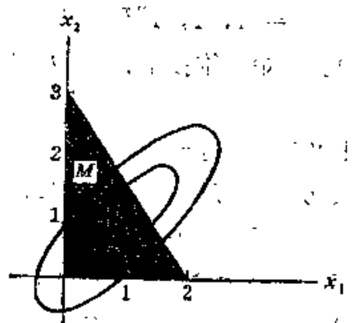


图 10-11

的内点(见图 10-11)，所以它是可行解。因此 $f(\mathbf{x})$的约束极小与全局极小均为同一点。

现在用 Hildreth 和 D'Espo 方法求解。首先，可以将定义 M 的不等式写作 $\mathbf{Bx}\leqslant\mathbf{c}$，其中

$$\mathbf{c}=[6,\ 0,\ 0]^T \text{和} \mathbf{B}^T=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

于是由直接计算

$$\mathbf{D}=\mathbf{BA}^{-1}\mathbf{B}^T=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}29 & -5 & -7\\ -5 & 1 & 1\\ -7 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

和

$$\mathbf{d}=\mathbf{c}+\mathbf{BA}^{-1}\mathbf{b}=\begin{bmatrix}6\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$=[1,\ 1,\ 1]^T$$

由 $\lambda^0=[0,\ 0,\ 0]^T$开始一维搜索，对于 $i=1$ 我们由(10.10)式得

$$1+29\lambda_1-5\lambda_2-7\lambda_3=0$$

$\lambda_2=\lambda_3=0$，解此方程，有 $\hat{\lambda}_1=-0.035$，因而 $\lambda_1^1=\max(0,\ \hat{\lambda}_1)=\max(0,\ -0.035)=0$。对 $i=2$ 和 3 以同样的方式利用(10.10)式，解得 $\lambda_2^1=0$ 和 $\lambda_3^1=0$，因而 $\lambda^1=[0,0,0]^T$。由于$\lambda^0=\lambda^1$，一维搜索已收敛，我们置 $\lambda^*=[0,\ 0,\ 0]^T$。现在用(10.8)式，我们得到

$$\mathbf{x}^*=-\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda}^*+\mathbf{b})$$

$$=-\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\2 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right]$$

$$=[1,\ 1]^T$$

它与图解结论一致。

八、Houthakker容量法

解二次规划问题的一个有趣的方法称为容量法。这归功于Houthakker。考虑求由(10.4)式给定的 $f(\mathbf{x})$的极小的问题，其约束集合 M 用(10.1)式给定。Houthakker 引进一新约束，形如

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant u \tag{10.11}$$

称为**容量约束**。如果现有约束 $\mathbf{Bx}\leqslant\mathbf{c}$ 中有一个已是容量约束

形式，则不必再引入新约束。原问题被修改为求 $\min\limits_{x\in M} f(x)$ 并且满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leqslant u$，这个修改了的问题的解用 $x^*(u)$表示。当参数 u 改变时，我们得到解 $x^*(u)$的不同值。$x^*(u)$关于 u 的轨迹是 M 中的一条折线，并且存在 u^* 使得对所有 $u \geqslant u^*$ 都有 $x^*(u)=x^*(u^*)$。由于对所有的 $x\in M$，当 $u \geqslant u^*$ 时，容量约束变成非紧的，所以有 $x^*=x^*(u^*)$。在算法开始时选取 $u=0$ 作为参数 u 的初始值。

例10-5 设 $f(x)$ 有以 x^0 为心的圆等值线族。确定函数 $f(x)$在如图10-12所示的约束集合 M 下的极小。

［**解**］ 在图 10-12 中，直线 u_1，u_2，…表示当 $u=u_1$，$u=u_2$，……时 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = u$ 的等值线。对于所有 u，$0\leqslant u\leqslant u_1$，$x^*(u)$位于 x_2 轴上。在 $u=u_1$ 处，$x^*(u)$ 的轨迹改变方向，并沿垂直于容量约束等值线移动，直到 $u_1=u_2$ 为止。对于所有 u，$u_2\leqslant u\leqslant u^*$，$x^*(u)$位于直线 $x_2=a$ 上；且对于所有 $u>u^*$，$x^*(u)=x^*(u^*)$，即容量约束已变成非紧约束。所以 $f(x)$的极小点是 $x^*=x^*(u^*)$。

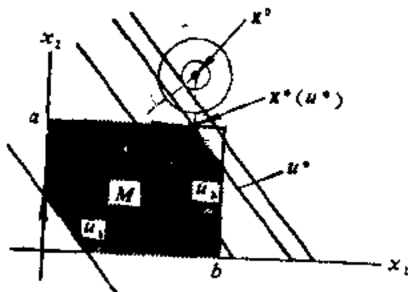


图 10-12

例10-6 对于 $f(x_1, x_2)=x_1^2+x_2^2$ 和 $M=\{(x_1,x_2)|3x_1+2x_2\leqslant 6, x_1, x_2\geqslant 0\}$，用Houthakker 的容量法求 $\max\limits_{x\in M} f(x)$。

[解] 在图10-13中表示出集合 M 与 $f(x)$ 的等值线，$f(x)$ 的等值线是以 $[0, 0]^T$ 为心的圆族。由几何直观我们看出 $f(x)$ 在 $x^*=[0, 3]^T$ 处达到极大，此点是 M 的一个极点。

现在考虑容量约束 $x_1+x_2\leqslant u$ 且 $0\leqslant u\leqslant 2$。等值线 $x_1+x_2=1$，如图 10-13 所示。由几何直观我们看到，

$\max\limits_{x\in M} f(x)$ 满足 $x_1+x_2\leqslant 1$ 的问题有两个解，即 $[1, 0]^T$ 和 $[0, 1]^T$，于是当 u 从 0 增加到 2 时我们得到 $x^*(u)$ 的两条轨迹。

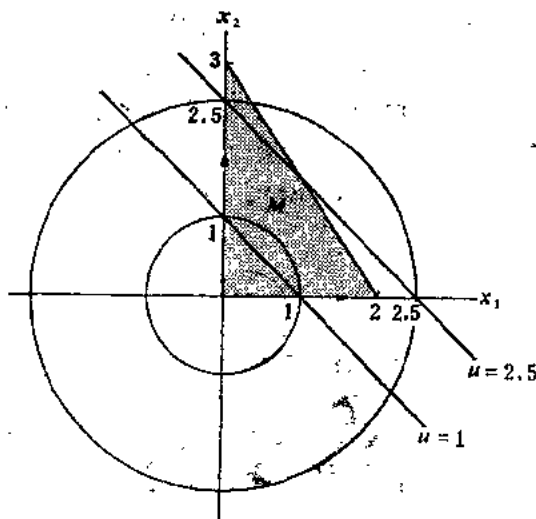


图 10-13

对于$u>2$，等值线$x_1+x_2=u$的部分曲线位于集合M之外，图10-13所示的是$u=2.5$的情形。对于$u>2$的情形由几何直观可看出，$\max\limits_{x\in M}f(x)$满足$x_1+x_2\leqslant u$的问题有唯一解$[0,\ u]^T$。$x^*(u)$的轨迹沿x_1轴停在$[2,\ 0]^T$上，但第二条轨迹沿x_2轴延续到$[0,\ 3]^T$。当$u>3$时，对所有$x\in M$容量约束变成非紧的，所以$x^*(3)=[0,\ 3]^T$是最优解。

九、修正单纯形法

单纯形法(见附录)是解线性规划问题的一个很有效的算法，并且它对解二次规划问题也已有了好几种修正的算法。只要我们考察一下二次规划的Kuhn-Tucker条件，单纯形法的应用就清楚了。

为明确起见，如果M由(10.2)式确定，则Kuhn-Tucker条件是

$$Bx^*=c \tag{10.6a}$$

$$Ax^*+B^T\lambda-u^*=-b \tag{10.6b}$$

$$(x^*,\ \mu^*)=0 \tag{10.6c}$$

$$x^*,\ \mu^*\geqslant 0 \tag{10.6d}$$

按照kuhn-Tucker定理，如果我们能找到(10.6a)和(10.6b)式的解且同时满足(10.6c)和(10.6d)式，则它也是二次规划问题的解。(10.6a)和(10.6b)式的每个解是一个$(m+2n)$维向量$u=[x^T,\ \lambda^T,\ \mu^T]^T$，如果它至多有$m+n$个非零分量，我们则称它为**基本解**(见例$A$-5)

设$x=[x^T\lambda^T,\mu^T]^T$是(10.6a)和(10.6b)式的解，同时满足(10.6c)和(10.6d)式。由(10.6d)式得$x_i,\mu_i\geqslant 0$，为了满足

(10.6c)式则要 $x_i=0$ 或 $\mu_i=0, i=1,\cdots,n$, 这意味着 $\mathbf{u}$ 至多有$m+n$ 个非零分量。因此(10.6a)和(10.6b)式的每个解如同时满足(10.6c)和(10.6d)式,则它是(10.6a)和(10.6b) 式的一基本解。但是，由于(10.6a)和(10.6b)式的每个基本解不一定满足(10.6c)和(10.6d)式，所以解二次规划问题，等价于求 (10.6a)和(10.6b)式的基本解且又能满足 (10.6c) 和(10.6d)式.在附录中讨论的单纯形法是生成这样的基本解的有效方法。但是单纯形法要加以修正使能求得满足(10.6c)式的基本解。解二次规划问题的这样一种修正单纯形法是由 Wolf 建立起来的。

Wolf 法

首先我们引进松弛变量$\mathbf{w}$, $\mathbf{z}^1$ 和 $\mathbf{z}^2\geqslant 0$,改写(10.6a) 和(10.6b)式成为

$$\mathbf{B}\mathbf{x}+\mathbf{w}=\mathbf{c} \tag{10.12a}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu}+\mathbf{z}^1-\mathbf{z}^2=-\mathbf{b} \tag{10.12b}$$

很清楚(10.12a)和(10.12b)式的基本解之一有$\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{0}$且对于每个 i 分量 z_i^1 或 z_i^2 至少有一个等于零。这个解也满足(10.6c)式。这一基本解的分量，有 $w_i=c_i(i=1,\cdots,m)$，其中假定 $c_i\geqslant 0$，以及如果 $b_i<0$，分量 $z_i^1=-b_i$，或如果 $b_i>0$有$z_i^2=b_i$。如果$b_i=0$,那么是否把z_i^1 或 z_i^2 作为基本可行解的部分是不重要的.

下一步我们用单纯形法(第一阶段) 在约束(10.12a) 和(10.12b)式又$\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\mu}=\mathbf{0}$下,求$\sum_{i=1}^{m} w_i$的极小。如果极小值是零，且相应的基本可行解是非退化的(即恰有$m+n$ 个非零分量)，则原问题的约束是不相容的，所以解不存在。但是如果基本

可行解是退化的(即非零分量少于$m+n$个)，则继续用单纯形法直至有一个w_i变量出现在基本可行解中，直至它为零值。于是最后的基本解，对于每个i至少包含m个x_i变量，以及z_i^1或z_i^2。现设z表示一个向量，其分量对每个i为z_i^1或z_i^2，这时向量z至多有n个分量。令D表示对角矩阵，其第i对角元素，如果$z_i=z_i^1$则为1，否则为-1。于是最后的单纯形法变为

$$\mathbf{B}\mathbf{x}=\mathbf{c} \tag{10.13a}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{D}\mathbf{z}=-\mathbf{b} \tag{10.13b}$$

其中x，z$\geqslant 0$。注意由于$\mu=0$，所以满足(10.6c)式。现在我们利用单纯形法，以w，z$\geqslant$0和(10.13a)，(10.13b)作为约束，求$\sum_{i=1}^{n} z_i$的极小(第二阶段)。但是，由于(10.6c)式也必须满足，我们不再接受每个可能的基本解。于是，如果x_i已在基本解中，则μ_i不包含在内，反之亦然。用这种办法保证x_i和μ_i不同时是基本变量，因而对所有被考虑的基本解有$(x,\mu)=0$。单纯形法一直继续到$\sum_{i=1}^{n} z_i=0$，即z$=0$为止，此时我们得到(10.6a)—(10.6d)式的一个解，同时也是二次规划的解。

例10-7 用Wolf的修正单纯形法求解在例10-3中讨论过的二次规划问题。

[解] 在例10-3中指出，正定二次函数$f(\mathbf{x})$在给定集合M的内点$[1,1]^T$上取得极小值(见图10-10)。在附录中讨论的单纯形法只探查集合M的极点。因此不按Wolf修正，这方法就不能生成诸如$[1,1]^T$这样的内点。在这个例子中我们

将看到，修正单纯形法允许在集合M内找出极小点。

首先我们引进一松弛变量$x_3 \geqslant 0$，使确定集合M的不等式可以写成 $3x_1+2x_2+x_3=6$，x_1，x_2，$x_3 \geqslant 0$ 或等价地写作$\mathbf{B}\mathbf{x}=c$，$\mathbf{x} \geqslant 0$，其中$\mathbf{B}=[3, 2, 1]$，$\mathbf{x}=[x_1, x_2, x_3]^T$和$c=6$。现在$M$由(10.2)式给定，我们可以使用(10.6$a$)—(10.6$d$)式。

引进松弛变量x_3，修改例 10-3 中给出的矩阵$\mathbf{A}$和向量$\mathbf{b}$。为了使$f(\mathbf{x})$象在例10-3中那样仍然为x_1和x_2的函数，我们定义

$$\mathbf{b}=[-1,0,0]^T \quad 和\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

方程(10.12a)和(10.12b)可写成

$$\begin{aligned} 3x_1+2x_2+x_3+w &= 6 \\ 2x_1-x_2 \quad +3\lambda-\mu_1+z_1^1-z_1^2 &= 1 \\ -x_1+x_2 \quad +2\lambda-\mu_2+z_2^1-z_2^2 &= 0 \\ \lambda-\mu_3+z_3^1-z_3^2 &= 0 \end{aligned}$$

现在按Wolf法的头一步，我们置$\lambda=\mu_1=\mu_2=\mu_3=0$，解出$x_1$和$x_2$作为$z_1^1$，$z_2^1$，$z_1^2$和$z_2^2$的函数。代入到(10.12$a$)式我们得到

$$w=1+5(z_1^1-z_1^2)+7(z_2^1-z_2^2)-x_3$$

现在w作为$z_1^1, z_1^2, z_2^1, z_2^2$和$x_3$的函数，为了在约束$w \geqslant 0$和$z_1^1$，$z_2^1$，$z_1^2, z_2^2, x_3 \geqslant 0$下求极小，可以使用单纯形法。但是为表示明瞭起见，我们将极据简单的代数考虑解这一问

题。

由于$w \geqslant 0$，通过每次选择变量的值满足非负性约束和使$w=0$，可得到w的极小值。一组可能选取的值是$z_1^1=z_2^1=1$，$z_1^2=z_2^2=0$和$x_3=13$。但是对于这些变量的值，还存在许多其他可能的选择。在Wolf方法的第二部分中利用单纯形法直到$\sum_{i=1}^{n} z_i=0$，这意味着我们必须确定一个解，使当所有z变量等于零时w取极小。一个明显又唯一的选择是$z_1^1=z_2^1=z_1^2=z_2^2=0$和$x_3=1$，此时我们有$x_1=1$和$x_2=1$。还由于$\mu_1=\mu_2=\mu_3=0$,得到$x_1\mu_1+x_2\mu_2+x_3\mu_3=0$。通过直接代入，我们看到$\mathbf{x}=[1,1,1]^T$，$\mu=[0,0,0]^T$和$\lambda=0$满足(10.6a)—(10.6d)式。于是由Kuhn-Tucker定理,得到$\mathbf{x}^*=[1,1,1]^T$，但由于x_3是一个松弛变量，所以$\mathbf{x}^*=[1,1]^T$给出二次规划问题的解。

习题与题解

10-1 设由(10.4)式给出的$f(\mathbf{x})$是正定二次函数，定义超平面$H=\{\mathbf{x} | \mathbf{x}\in E^n, \mathbf{B}\mathbf{x}=\mathbf{c}\}$。求问题$\min\limits_{\mathbf{x}\in H} f(\mathbf{x})$的解。

[解] 我们假定$\mathbf{B}$是秩为m的$m\times n$矩阵，其中$m<n$。由于H是凸集和$f(\mathbf{x})$是严格凸的，存在唯一的约束极小。现在构造相应的Lagrange函数

$$L(\mathbf{x},\lambda)=\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}+(\mathbf{b}+\mathbf{B}^T\lambda)^T\mathbf{x}-\lambda^T\mathbf{c} \qquad (10.14)$$

其中$\lambda\in E^m$是Lagrange乘子向量。对于常向量λ，$L(\mathbf{x},\lambda)$有唯一的驻点

$$\mathbf{x}(\lambda)=-\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{b}+\mathbf{B}^T\lambda) \qquad (10.15)$$

为确保$\mathbf{x}(\lambda)\in H$,选择(10.15)中的$\mathbf{y}$满足$\mathbf{B}\mathbf{x}(\lambda)=\mathbf{c}$。结果

$$\lambda^*=-(\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T)^{-1}(\mathbf{c}+\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}) \qquad (10.16)$$

$$\mathbf{x}^*=-\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{b}+\mathbf{B}^T\lambda^*) \qquad (10.17)$$

其中$\mathbf{x}^*$是$f(\mathbf{x})$在H上的约束极小。

10-2 在问题10-1中，证明存在一个$n\times n$对称矩阵$\mathbf{W}$，使得对每一$\mathbf{x}\in H$，有$\mathbf{W}\mathbf{g}(\mathbf{x})=\mathbf{x}-\mathbf{x}^*$，其中$\mathbf{g}(\mathbf{x})=\nabla f(\mathbf{x})$。

［**解**］ 令$\mathbf{w}=\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{c}$和$z=-\mathbf{g}(\mathbf{w})=-(\mathbf{A}\mathbf{w}+\mathbf{b})$，则$\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{z}=-(\mathbf{c}+\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b})$，且由(10.16)式得到

$$\lambda^*=-(\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}(\mathbf{w}) \qquad (10.18)$$

由于$f(\mathbf{x})$是二次函数,则有$\mathbf{g}(\mathbf{w})=\mathbf{g}(\mathbf{x})+\mathbf{A}(\mathbf{w}-\mathbf{x})$。将$\mathbf{g}(\mathbf{w})$表达式代入 (10.18)式，注意到对于$\mathbf{x}\in H$，$\mathbf{B}\mathbf{x}=\mathbf{c}$，我们有

$$\lambda^*=-(\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}(\mathbf{x}) \qquad (10.19)$$

现在将(10.19)式的λ^*代入(10.17)式,重新排列各项，得到$\mathbf{W}\mathbf{g}(\mathbf{x})=\mathbf{x}-\mathbf{x}^*$，其中

$$\overline{\mathbf{W}}=\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} \qquad (10.20)$$

现在由于$\mathbf{A}$是$n\times n$矩阵,A^{-1}也是$n\times n$矩阵,从而$\mathbf{W}$是$n\times n$矩阵。$\mathbf{A}$又是对称的，这蕴含着$\mathbf{A}^{-1}$是对称的,$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}$由其结构知也是对称的。因此$\mathbf{W}$是对称矩阵。

10-3 设M由(10.3)式给定，$f(\mathbf{x})$由(10.4)式给定。令$\mathbf{x}^*$表示$f(\mathbf{x})$在M上的唯一极小点。如前所述，S^*是整数

$\{1, \cdots, m\}$的一个子集，对于$j\in S^*$有$(\mathbf{b}^j, \mathbf{x}^*)=c_j$。证明$\mathbf{x}^*=\mathbf{x}[S^*]$。

[证] 我们利用Kuhn-Tucker条件证明这个结果。由于$\mathbf{x}^*\in M$，有$(\mathbf{b}^j, \mathbf{x}^*)<c_j$对无论怎样的$j\notin S^*$成立。从(10.7b)式得到

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^*+\mathbf{b}=-\sum_{j=1}^{m}\lambda_j^*\mathbf{b}^j \tag{10.21}$$

并且由于$\lambda_j^*>0$(当$j\notin S^*$时)，从(10.7c)和(10.7d)式得到(当$j\notin S^*$时)$\lambda_j^*=0$。于是(10.21)式变为

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^*+\mathbf{b}=-\sum_{j\in S^*}\lambda_j^*\mathbf{b}^j \tag{10.22}$$

从(10.22)式和给定的假设$(\mathbf{b}^j, \mathbf{x}^*)=C_j, j\in S^*$,推得$\mathbf{x}^*$满足以$S^*$中的约束为等式约束时，$f(\mathbf{x})$极小点的Kuhn-Tucker条件。这极小点以$\mathbf{x}[S^*]$表示，由于$f(\mathbf{x})$是严格凸的，它是唯一的，所以$\mathbf{x}^*=\mathbf{x}[S^*]$。

10-4 令S是整数$\{1, \cdots, m\}$的一个子集，使$\mathbf{x}[S]\in M$。如果对每个$k\in S$有$k\in V[\mathbf{x}[S-k]]$，试证$\mathbf{x}[S]=\mathbf{x}^*$。

[证] 由问题10-1，我们有

$$\mathbf{A}\mathbf{x}[S]+\mathbf{b}=-\sum_{j\in S}\lambda_j\mathbf{b}^j \tag{10.23}$$

$$(\mathbf{b}^j, \mathbf{x}[S])=c_j \quad j\in S \tag{10.24}$$

现在任意选择$k\in S$，再次利用问题10-1的结果，则得到

$$\mathbf{A}\mathbf{x}[S-k]+\mathbf{b}=-\sum_{j\in S-k}\lambda_j\mathbf{b}^j \tag{10.25}$$

$$(\mathbf{b}^j, \mathbf{x}[S-k])=c_j \quad j\in S-k \tag{10.26}$$

假设指出

$$(\mathbf{b}^j, \mathbf{x}[S-k])>c_k \tag{10.27}$$

利用(10.23)-(10.26)式，得到

$$((\mathbf{x}[S]-\mathbf{x}[S-k]),\ \mathbf{A}(\mathbf{x}[S]-\mathbf{x}[S-k]))$$
$$=\lambda_k[(\mathbf{b}^k,\ \mathbf{x}[S-k])-c_k] \qquad (10.28)$$

由于 **A** 正定，(10.28)式的左边是非负的，又由(10.27)式知，(10.28)式右边外层括号里的因子是非负的，因此对所有$k\in S$有$\lambda_k\geqslant 0$。把这一结果与(10.23)式和假设$\mathbf{x}[S]\in M$结合起来，便得出结论说 $\mathbf{x}[S]$ 满足关于 $\min\limits_{x\in M} f(\mathbf{x})$ 的Kuhn-Tucker 条件，从而$\mathbf{x}[S]=\mathbf{x}^*$。

10-5 假设 $\mathbf{x}^*=\mathbf{x}[S]$，其中$S$是整数 $\{1,\ \cdots,\ m\}$的某非空子集。则对所有$S_1\subset S$，包括 $S_1=\phi$，证明至少存在一个$k\in S-S_1$，使$k\in V[\mathbf{x}[S_1]]$。

［证］ 我们注意到，由于$\mathbf{x}[S]=\mathbf{x}^*$，$\mathbf{x}[S]$ 满足为 $\mathbf{x}^*$ 所满足的 Kuhn-Tucker条件，这意味着 $\mathbf{x}[S]$ 满足(10.23)和(10.24)式，并且$\lambda_j\geqslant 0$，$(\mathbf{b}^j\mathbf{x}[S])<c_j$，$j\notin S$。现在对每个$S_1\subset S$，$\mathbf{x}[S_1]$所满足的Kuhn-Tucker 条件如下所述

$$\mathbf{A}\mathbf{x}[S_1]+\mathbf{b}=-\sum_{j\in S_1}\hat{\lambda}_j\mathbf{b}^j \qquad (10.29)$$

$$(\mathbf{b}^j,\ \mathbf{x}[S_1])=c_j \quad j\in S_1 \qquad (10.30)$$

由(10.23)和(10.29)式我们有

$$\mathbf{A}[\mathbf{x}[S_1]-\mathbf{x}[S]]=\sum_{j\in S_1}(\lambda_j-\hat{\lambda}_j)\,\mathbf{b}^j+\sum_{j\in S-S_1}\lambda_j\mathbf{b}^j$$

利用(10.26)和(10.30)式，以及代数运算，得到

$$((\mathbf{x}[S_1]-\mathbf{x}[S]),\mathbf{A}(\mathbf{x}[S_1]-\mathbf{x}[S]))=\sum_{j\in S-S_1}\lambda_j[(\mathbf{b}^j,$$
$$\mathbf{x}[S_1])-c_j] \qquad (10.31)$$

因为**A**是正定的，(10.31)式左边非负，且对所有$j\in S-S_1$，有$\lambda_j\geqslant 0$。因此必定存在至少一个$k\in S-S_1$，使$(\mathbf{b}^k,\ \mathbf{x}[S_1])>c_k$。

10-6 在Theil和Van de Panne方法中，必须得到 $\mathbf{x}[S]$作为$\mathbf{x}^0$，$\mathbf{A}^{-1}$，$\mathbf{B}$和$\mathbf{c}$的函数。试求 $\mathbf{x}[S]$。

［**解**］ 因为 $\mathbf{x}[S]$是 $f(\mathbf{x})$在S 中的约束为紧约束时的极小，所以可以利用问题10-1 的结果。假定组成矩阵$\mathbf{B}$的向量$\mathbf{b}^j(j\in S)$线性无关(非退化)，利用(10.15)式得到

$$\mathbf{x}[S]=-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{x}^0-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{y} \qquad (10.32)$$

其中$\mathbf{x}[S]$必须满足$\mathbf{B}\mathbf{x}[S]=\mathbf{c}$。以$\mathbf{B}$左乘(10.32)式，解出 $\boldsymbol{\lambda}$，得到

$$\boldsymbol{\lambda}=(\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T)^{-1}(\mathbf{B}\mathbf{x}^0-\mathbf{c})$$

因此

$$\mathbf{x}[S]=\mathbf{x}^0-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{T})^{-1}(\mathbf{B}\mathbf{x}^0-\mathbf{c})$$

10-7 考虑由(10.4)式定义的$f(\mathbf{x})$在由 (10.3) 式确定的M集合上的极小化问题。令$\boldsymbol{\lambda}^*$是问题

$$\min\left[\mathbf{d}^T\boldsymbol{\lambda}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\lambda}\right]$$

的解，其中$\mathbf{D}$和$\mathbf{d}$如(10.9)式的下一行所定义。证明由(10.8)式给定的 $\mathbf{x}^*$ 是原二次规划问题的解。

［**证**］ 由假设，得$\boldsymbol{\lambda}^*\geqslant 0$。由于 $\mathbf{x}^*$为(10.8)式所给定，所以$\mathbf{x}^*$和$\boldsymbol{\lambda}^*$满足(10.7b)式。由于$\boldsymbol{\lambda}^*$是上面给定的极小化问题的解，由Kuhn-Tucker条件可知，存在$\mathbf{y}^*\geqslant\mathbf{0}$使得$\mathbf{D}\boldsymbol{\lambda}^*-\mathbf{y}^*=-\mathbf{d}$ 和$(\boldsymbol{\lambda}^*,\mathbf{y}^*)=0$。利用方程(10.8)式和$\mathbf{D}$与$\mathbf{d}$ 的定义，可以很容易证明$\mathbf{x}^*$和$\mathbf{y}^*$满足(10.7a)式。因此由Kuhn-Tucker 定理，$\mathbf{x}^*$ 是原二次规划问题的解。

10-8 Hildreth 和 D'Espo 方法利用一维搜索解问题

$\min_{\lambda\geqslant 0}\left[d^T\lambda+\frac{1}{2}\lambda^T D\lambda\right]$。证明由此方法生成的序列$\{\lambda^k\}$收敛到欲求的极小解$\lambda^*$处。

［证］ 从方程(10.10)式我们看到，由于$d_{ii}\neq 0$，$\hat{\lambda}_i$是唯一的。令$L[\lambda]=d^T\lambda+\frac{1}{2}\lambda^T D\lambda$，于是当$\lambda_j=\lambda_j^k$，$j=1,\cdots,m(j\neq i)$时，$L(\lambda)$在$\lambda_i$或零处取得关于$\lambda_i$的极小值。由此推出$L[\lambda^{k+1}]\leqslant L[\lambda^k]$。因为$\lambda^{k+1}$由$\lambda^k$得出，我们可以用$\lambda^{k+1}=T(\lambda^k)$表示这个过程，其中$T$表示一个算子，它描述搜索方法。于是有$L[T(\lambda^k)]\leqslant L[\lambda^k]$，并且有$L[T(\lambda)]=L[\lambda]$，当且仅当$\lambda=\lambda^*$.如果我们确定有界区域$\Lambda=\{\lambda|\lambda\geqslant 0,L[\lambda]\leqslant L[\lambda^0]\}$，则对所有$k>0$有$\lambda^k\in\Lambda$，因而集合$\{\lambda^k\}$有一极限点，记为$\bar{\lambda}$。因$L[\lambda]$关于$\lambda$连续，所以$L[\bar{\lambda}]$是$L[\lambda^k]$的一个极限点。又因$T(\lambda)$关于$\lambda$连续，所以$T(\bar{\lambda})$是$T(\lambda^k)$的一极限点。结果$L[T(\bar{\lambda})]$是$L[T(\lambda^k)]$的极限点。但是$L[T(\lambda^k)]$与$L[\lambda^k]$是同一个序列。由于$L[\lambda^k]$单调，我们得到$L[T(\bar{\lambda})]=L[\bar{\lambda}]$，因此$\bar{\lambda}=\lambda^*$。

10-9 （对偶问题）令$F(x,\lambda)=-\left[\frac{1}{2}x^T Ax+\lambda^T c\right]$，定义$N=\{(x,\lambda)\,|\,Ax+B^T\lambda=-b,\lambda\geqslant 0\}$。则称$\max_{(x,\lambda)\in N}F(x,\lambda)$为$\min_{x\in M}f(x)$的对偶问题，其中$f(x)$由(10.4)式给定，$M$由(10.3)式给定。假设$x\in M$是这样的点，使存在某$\lambda\geqslant 0$满足$(x,\lambda)\in N$。证明$f(x)\geqslant F(x,\lambda)$。

［证］ 由于$(x,\lambda)\in N$，有$Ax+B^T\lambda=-b$.以x^T左乘此方程，转置和重新排列结果。我们得到$\lambda^T Bx=-[b^T x+x^T Ax]$。由于$x\in M$，得到$Bx\leqslant c$。于是注意到$\lambda\geqslant 0$，则可

以写作 $\lambda^T \mathbf{B}\mathbf{x} \leqslant \lambda^T \mathbf{c}$。因此 $-[\mathbf{b}^T\mathbf{x}+\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}] \leqslant \lambda^T \mathbf{c}$ 或

$$\left[\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}^T\mathbf{x}\right] \geqslant -\left[\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}+\lambda^T\mathbf{c}\right]$$，即 $f(\mathbf{x}) \geqslant F(\mathbf{x},\lambda)$。

10-10 (对偶定理)证明如果原问题有一解 $\mathbf{x}^* \in M$，则它的对偶有一解 $(\mathbf{x}^*, \lambda^*) \in N$，并且 $f(\mathbf{x}^*) = F(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$。

[**证**] 因为 $\mathbf{x}^* \in M$ 是原极小化问题的解，由 Kuhn-Tucker 条件得知，存在某 $\lambda^*, \mathbf{y}^* \geqslant 0$ 满足(10.7*a*-*c*)式；且由于 $\mathbf{x}^*$，λ^*满足(10.7*b*)，则有 $(\mathbf{x}^*, \lambda^*) \in N$。现在利用(10.7*a*)(10.7*c*)式和类似于问题 10-9 的论证，可以很容易得到 $f(\mathbf{x}^*)=F(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$。假设至少存在一个 $(\mathbf{x}, \lambda) \in N$ 满足 $F(\mathbf{x}, \lambda) > F(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$，利用在问题 10-9 中给出的 $F(\mathbf{x}, \lambda)$ 的表达式和 $\mathbf{A}$ 的正定性，得到 $\mathbf{c}^T(\lambda^*-\lambda) > 12[\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}-(\mathbf{x})^T\mathbf{A}\mathbf{x}^*] > (\mathbf{x}^*)^T\mathbf{A}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)$。

因为 $(\mathbf{x}, \lambda) \in N$，有 $\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}^T\lambda=-b$。把此方程与(10.7*b*)式结合起来，得到 $\mathbf{A}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)=\mathbf{B}^T(\lambda^*-\lambda)$，所以 $\mathbf{c}^T(\lambda^*-\lambda) > (\mathbf{x}^*)^T\mathbf{B}^T(\lambda^*-\lambda)$。将(10.7*a*)和(10.7*c*)式应用到这个不等式，得到 $(\mathbf{y}^*)^T\lambda < 0$。由于 $\mathbf{y}^* \geqslant 0$，至少有 λ 的一个分量必定为负。但是，这与我们假定 $(\mathbf{x}, \lambda) \in N$ 矛盾，因此 $F(\mathbf{x}^*, \lambda^*) = \max\limits_{(\mathbf{x},\lambda)\in N} F(\mathbf{x},\lambda)$。

10-11 证明：如果 $(\mathbf{x}^*, \lambda^*) \in N$ 是对偶问题的解，且 $\mathbf{A}$ 正定，则 $\mathbf{x}^*$ 是原问题的解。

[**证**] 我们构造对偶问题的 Lagrange 函数，它是

$$-\left(\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{c}^T\lambda\right)+\mathbf{p}^T(\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}^T\lambda+\mathbf{b})+\mathbf{q}^T\lambda$$，其中 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{q}$ 是 Lagrange乘子向量。则关于对偶问题的Kuhn-Tucker 条件变为

$$-\mathbf{A}\mathbf{x}^*+\mathbf{A}\mathbf{p}^*=0 \tag{10.33a}$$

$$\mathbf{B}\mathbf{p}^*+\mathbf{q}^*=\mathbf{c} \tag{10.33b}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^*+\mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda}^*=-\mathbf{b} \tag{10.33c}$$

$$(\boldsymbol{\lambda}^*,\ \mathbf{q}^*)=0 \tag{10.33d}$$

$$\boldsymbol{\lambda}^*,\ \mathbf{q}^*\geqslant 0 \tag{10.33e}$$

因为 $\mathbf{A}$ 是正定的，从(10.33a)式得到 $\mathbf{x}^*=\mathbf{p}^*$。用 $\mathbf{x}^*$ 代替(10.33b)式中的 $\mathbf{p}^*$，重新命名 $\mathbf{q}^*=\mathbf{y}^*$，我们观察到(10.33$b$)-(10.33$e$)式与(10.7$a$-$d$)式是相同的。所以由Kuhn-Tucker定理知，$\mathbf{x}^*$ 是原问题的解。

补 充 题

10-12 设集合 M 由不等式 $x_1,\ x_2\geqslant 0$，$x_1+x_2\leqslant 3$，$2x_1-x_2\leqslant 4$ 和 $x_2\leqslant 2$ 所确定，目标函数是 $f(x)=(1/2)\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}^T\mathbf{x}$，其中

$$\mathbf{b}=[-15,\ -7]^T \text{ 和 } \mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

用Theil和 Van de Panne 法求 $f(\mathbf{x})$ 在M上的约束极小。

10-13 用 Hildreth和 D'Espo 法解问题 10-12。

10-14 用 Houthakker容量法解问题 10-12。

10-15 用 Wolf 的修正单纯形法解问题 10-12。

第十一章　整数规划

在前面几章中，我们已经讨论了无约束问题和约束问题的最优化方法，其中所有变量都假设是实值变量。本章我们考虑一类最优问题，其中至少有一些变量限制为整值变量。当一个变量是整值时，它不能再用无穷小增量加以改变，因此，不能再使用诸如连续性和可微性等概念了。

整数约束能被应用于任何最优化问题，所以我们有**线性整数规划**和**非线性整数规划**。如果一些变量允许取非整值，则我们得到**混合整数规划**。由于获得非线性规划问题的整数解的方法相对来说为数不多，所以在这一章中，将注意力限制在整数和混合整数线性规划。在下面的例子中，将提出这类问题中的几个著名的和实用的问题。稍后在本章将叙述它们的解法。

例11-1　(背包问题)令 $S=\{1, \cdots, M\}$ 表示一组物体，其中第 i 物体重 w_i 单位，价值 v_i 单位。问题是把集合 S 中的物件装进背包，使得它里面的总价值极大而总重不超过给定的上界。我们想把这问题提成整数规划问题。

〔解〕　令 W 表示已知的总重上界。定义变量 x_i，如果第 i 项被选中，则 $x_i=1$，否则 $x_i=0$。现在可以将问题叙述如下：

$$\max_{x} \sum_{i=1}^{M} x_i v_i$$

且使 $\sum_{i=1}^{M} x_i w_i \leqslant W$

其中 $0\leqslant x_i\leqslant 1$，且对于所有 i，$1\leqslant i\leqslant M$，x_i 是一个整数。由于 x_i 对所有 $i(1\leqslant i\leqslant M)$ 是整数，我们得到了一个整数规划问题。注意，如果 x_i 对所有 $i(1\leqslant i\leqslant M)$ 取实值，则我们得到一个标准的线性规划问题。

例11-2 （旅行推销员问题）考虑一个旅行推销员，他想从城市 O 出发旅行 $N+1$ 个城市。问题是要求 $N+1$ 个城市的回路周游路线，经过每个城市且只经过一次，并使费用最省。试把这个问题提成整数规划问题。

〔**解**〕 令 c_{ij} 表示从城市 i 到城市 j 旅行的费用，引进变量 x_{ij}，如果推销员从城市 i 旅行到城市 j，则 $x_{ij}=1$，否则 $x_{ij}=0$。不失一般性，我们假设推销员从城市 O 开始。现在把整值变量 x_{ij} 满足的约束用式子表述出来。由于每个城市在闭路周游中必须访问一次，我们看到，对于每个 j，必存在某个 $i\neq j$，使 $x_{ij}=1$ 和 $x_{pj}=0(p\neq i)$。这条件等价于下列约束

$$\sum_{i=0}^{N-1} x_{ij}=1 \qquad \text{对所有 } j\neq 0,\ i\neq j$$

注意到旅行推销员必定离开每个城市一次，用类似的做法得到

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij}=1 \qquad \text{对所有 } i\neq N,\ i\neq j$$

对变量 x_{ij} 的这些约束保证推销员从城市 O 开始到城市 N 结束他的旅程。于是我们得到一个开路周游，而不是回路周游。但是，每个回路周游问题可以转化为一个开路周游问题。我们引进一个人为的城市，比如说城市 N，使 $C_{ON}=0$，并对所有 j，有 $C_{Oj}=C_{Nj}$。这就意味着在开路周游中的最后的城市与第一个城市是相同的，从而我们得到了回路周游。迄今我们引进的约束保证推销员访问每个城市一次，且仅

有一次，并且从城市 O 开始和结束其旅程于城市 O。但是这些约束并不排除有可能得到多于一个的不相重叠的回路周游，而不是由全部 $N+1$ 个城市组成单一回路周游。为防止出现多个不相重叠的回路周游，我们将每个城市 i 联系一个实数 y_i，$0\leqslant y_i\leqslant N$。于是我们引进下列约束：

$$y_i-y_j+Nx_{ij}\leqslant N-1;\ 0\leqslant i\leqslant N-1,\ 1\leqslant j\leqslant N,\ i\neq j$$

为了明白这最后的一组约束排斥了任何不相重叠的回路周游，我们考虑由 k 个城市组成的这样一个部分周游，对于回路中每个城市，有 $x_{ij}=1$，在回路里具有 $x_{ij}=1$的每段弧满足上述不等式；且当我们把部分回路中 k 段弧所相应的这些不等式加起来时，差 y_i-y_j 彼此对消，我们得到 $Nk\leqslant(N-1)k$，这是一个矛盾。所以最后一组约束将排除任何部分周游。

现在旅行推销员问题变为极小化周游费用，此费用定义为

$$\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}x_{ij}$$

其中变量 x_{ij} 是整值的，且要求满足给定的约束。约束大约有 N^2 个，这使得当 N取值很大时，旅行推销员问题的数值解就很难求了。

例11-3 （分配问题）考虑一个电子设备工厂主，他的公司有 N 个不同电子装置的定货单、公司雇用了 M 个人，他们每个人都有能力制造这些装置的每一种，问题是求为供应顾客所需要的时间最小。我们想把这问题提成一个整数规划问题。

〔**解**〕 令 d_j 表示已被定货的第 j类装置的总数，x_{ij}表

示第i雇员制造第j类装置的数目，t_{ij}表示由第i雇员生产第j类装置所需的时间。于是标准的分配问题是求$\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}x_{ij}t_{ij}$在约束$\sum_{i=1}^{M}x_{ij}\geqslant d_j$，$j=1$，…，$N$下的极小。注意由于定义，对所有的$i$和$j$变量$x_{ij}$必须是非负的整数。

一、截断和舍入

在表面上似乎可能把整数线性规划作为一个一般的线性规划来处理，似乎可能用标准的单纯形法来求解。而为了得到整数解，必须截断或舍入由单纯形法得到的解。不幸的是这种简单的过程不可能提供一个整数解，如图 11-1 所示。

在图 11-1 中，粗面点表示整数线性规划问题的可行解。x^*表示标准的线性规划的最优解。如果对x^*作截断，则得x^1。但是x^3是有更高函数值的整数可行解，事实上x^3是整数线性规划的最优解。如果对x^*作舍入，得到x^2，它甚至不是一个可行解。因此截断和舍入这种简单的办法不被引

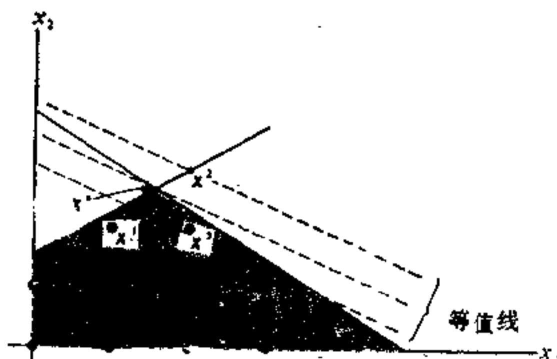


图 11-1

用，除非有某种简单方法来检验最后解的精确度。但是当最优解对于加上或减一个单位这种变化不敏感时，即当解是很大的数时，常常采用这些方法。

二、分支估界法

分支估界法特别适宜于解整数规划问题。该方法利用了**解树**的概念，它被定义为包括所有结点和分支的图，这里**结点**表示所有可行解集合的一个子集，**分支**是连接任意两结点的有向线段。下面的例子里，我们对分配问题导出解树。

例11-4 设想有三个强盗计划抢劫银行。这里包括三件工作：(1) 驾驶逃跑用汽车，(2) 搜集金钱，(3) 提供掩护。每个强盗都能指定做三件工作中的任何一个。我们的问题是

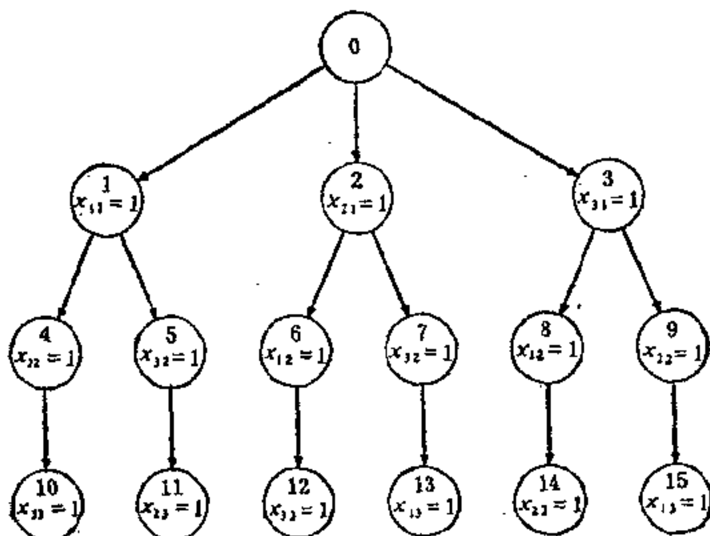


图 11-2

构造一个表示所有可能分配的解树。

〔解〕 我们引进变量 $x_{i,j}$, $(1\leqslant i, j\leqslant 3)$。如果第 i 个盗贼被分派做第 j 项工作，则 $x_{i,j}=1$，否则 $x_{i,j}=0$。解树为图 11-2 所示。其中每个结点上均有统一的编号。树的构造描述如下：

结点 0 是所有可能分配的集合。结点 1 是盗贼 1 被分派做第 1 项工作时所有可能分配的集合。类似的解释可应用于结点 2 和 3 。结点 4 是盗贼 1 被指定做第 1 项工作和盗贼 2 做第 2 项工作时所有分配的集合。类似的解释可应用于结点 5 到 9 。最后 末端结点 10 是唯一的分配，此时盗贼1、2、3 分别指派做第 1、2、3 项工作。类似的解释可应用于结点 11 到 15。

现在考虑函数极小化问题，我们可以利用如在例11-4中讨论的解树求得极小解。一个方法是计算每个末端结点的函数值而后直接视察来得到极小解。但是这个方法要求找出所有可能的止于末端结点的分支序列。这对含有大量变数的问题来说是一个艰难的工作。分支估界法通过使用一种判别来抛弃一些分支(路线)序列，从而减少寻找极小解所需的工作量，这样就简化了这个任务。

考虑树上的任意一结点，比如说第 k 结点。求在第 k 结点的可行解，并计算在这点的目标函数 $f(x)$值，比如说 f_k。现在假定将结点 k 进一步细分成其他的结点，它们中包括结点 p。计算 $f(x)$ 在结点 p 所含的所有可行解的集合上的下界，并以 f_p 表示之。得到这种下界的方法依赖于所考虑的问题。但是，如果 $f_k<f_p$，则在从第 p 结点出发的解树中，没有一条路线能导致比 f_k 更小的函数值。因此，在进一步考虑时，可除掉树中所有这样的路线，直到我们达到这样一步，使现

行考虑的所有结点 q 都有 $f_q>f_p$ 时为止。这个消去法使获得极小解所作的探索得以节省。

例11-5 (整数线性规划)我们假定所有可行解的集合用下列约束定义

$$-2x_1+3x_2\leqslant 3$$
$$x_1+2x_2\leqslant 8$$

其中 $x_1, x_2\geqslant 0$。问题是求 x_1+4x_2 的极大，这里 x_1 和 x_2 的最优值要求是整值。

〔解〕 所有可行解的集合用图 11-3 中带阴影的区域表示，其中粗圆点表示整可行解。函数 $f(\mathbf{x})=x_1+4x_2$ 的两条等值线也在图中表示出来，显然 $f(\mathbf{x})$ 在 $x_1=4$，$x_2=2$ 处取得最大值12。我们将全部可行解的集合(不考虑整数约束)表示为分支估界法中的结点 0，并借助于简单图形的分析来证实 $f(\mathbf{x})$ 在 $x_1^*=2.5$和 $x_2^*=2.7$达到最大值13.42(见图11-3)。因 x_1^* 和 x_2^* 不是整数，我们继续将结点 0 细分成结点 1 和 2，如图 11-4 所示。

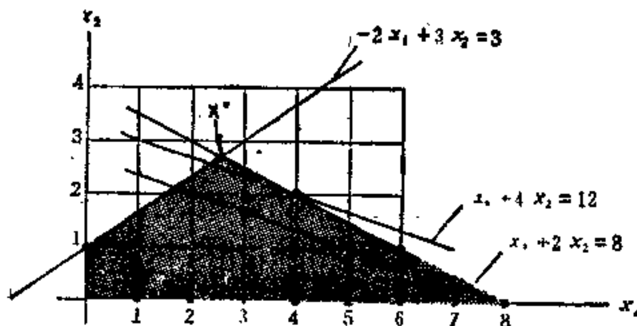


图 11-3

因为 $x_2^*=2.7$，得到结论为最优整数解将满足或 $x_2\geqslant 3$

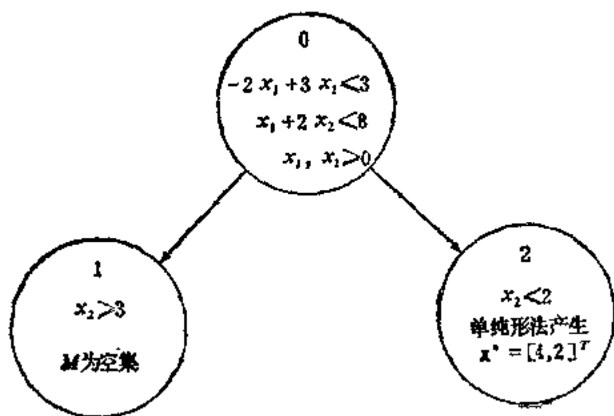


图 11-4

或 $x_2\leqslant 2$。所以通过把约束 $x_2\geqslant 3$ 附加到确定结点 0 的约束上，生成结点 1，并且由图 11-3 我们看出，结点 1 是空集，M，其中 M 是所有可行解的集合。

我们通过把约束 $x_2\leqslant 2$ 附加到确定结点 0 的约束上，得到结点 2，所以结点 2 包括了图 11-3 中所示黑影区域内所有可行解。从图上我们证实 $f(\mathbf{x})$ 在 $x_1=4$ 和 $x_2=2$ 处取得最大值12。

在结点 2 中得到的最优解是整值的，且进一步细分结点 2 只能得到更小的函数值。所以我们得到的结论是：结点 2 提供了求最大问题的解。注意，如果我们舍入 x_1^* 和 x_2^*，我们得 $x_1=3$ 和 $x_2=3$，它不是可行解。截断则得 $x_1=2$ 和 $x_2=2$，此时函数值为10，也不是最优解。

例11-6 （混合整数线性规划） 考虑在例 11-5 中的问题，只要求 x_1 是整值的。通过分支估界法解此混合整数线性规划问题。

〔**解**〕 如同例 11-5 中的情况，我们从结点 0 开始，得到 $x_1^*=2.58$ 和 $x_2^*=2.71$。因为只要求 x_1 是整值，用下列方式我们得到结点 1 和 2 。

结点 1 是由约束 $x_1\leqslant 2$ 附加到确定结点 0 上而得到的。从图形上证实，$f(\mathbf{x})$ 在 $x_1=2$ 和 $x_2=2.34$ 处达到最大值 11.36。

结点 2 是由约束 $x_1\geqslant 3$ 附加到确定结点 0 上而得到的。从图形上证实，$f(\mathbf{x})$在 $x_1=3$ 和 $x_2=2.5$ 处达到最大值13。

结点 2 提供了比结点 1 更优的函数值，所以最大解由 $x_1=3$ 和 $x_2=2.5$ 给出。

三、割平面法

如图 11-1 中所示，整线性规划最优解很可能是所有可行解集合的一个内点。所以像单纯形法那样只探索这集合极点的算法，将不能得出这样的解。消除这一困难的途径之一，是用超平面截除可行解的部分内集，使得最优整数解最终变成新的可行解集的极点，为此目的使用的超平面称为**割平面**。得到这样的割平面的方法有很多，这里我们只讨论属于 Gomory的方法。

现在考虑线性规划的一般问题，并添加要求变量是整值的。为了解这种整数线性规划问题，首先不管整数约束，用单纯形法解线性规划问题。如果最优解是整值，则完成求解；否则，引进一个新的约束超平面，使原有的可行解集合缩小。

为了在解整数线性规划时有好的效率，新的约束超平面应当具有两条性质。首先，在得到新的可行解集合时不能丢

掉原来问题中的任何整数可行解，其次，它应使原来问题中的最优解成为不可行的。紧接着我们在新的可行解集合上用单纯形法解线性规划，且如果新的最优解是整值的，则完成求解，否则我们引进另外的约束超平面，并且继续上面的处理。现在我们讲如何选择这些附加超平面的问题。

考虑下列形式的线性规划问题

$$\max_{\mathbf{y} \in Y} (\mathbf{c}, \mathbf{y})$$

其中

$$Y = \{\mathbf{y} | \mathbf{y} \in E^{m+n}, \mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{b}, \mathbf{y} \geqslant 0\}$$

这里 $\mathbf{b} \in E^m$, $\mathbf{b} \geqslant 0$ 以及 $\mathbf{B}$ 是 $m \times (n+m)$ 矩阵。方程 $\mathbf{B}_y = \mathbf{b}$ 也可以写作

$$\begin{matrix} b_{11} y_1 + \cdots + b_{1,m+n} y_{m+n} = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ b_{m1} y_1 + \cdots + b_{m,m+n} y_{m+n} = b_m \end{matrix} \qquad (11.1)$$

一组有 $m+n$ 个未知数 y_1, …, y_{m+n} 的 m 个线性代数方程。我们可以随意地置 $m+n$ 个变量中的任意 n 个等于零，且对留下的 m 个变量求解(11.1)式。不失一般性，我们假定 $y_{m+1} = \cdots = y_{n+m} = 0$，然后解(11.1)式，如果向量 $\mathbf{b}^j = [b_{1j}, \cdots, b_{mj}]^T$，$j=1, \cdots, m$ 构成 E^m 中的基，则得 $y_1, \cdots y_m$，的唯一解。如果 $y_j \geqslant 0$，$j=1,\cdots,m$，我们称(11.1)式的相应解为**基本可行解**、y_j 为**基本变量**。现在问题是求(11.1)式的使$(\mathbf{c},\mathbf{y})$取极大的基本可行解。

令 $\mathbf{y}^* = [(\mathbf{y}^1)^T, (\mathbf{y}^2)^T]^T$表示由单纯形法得到的最优基本可行解，其中 $\mathbf{y}^1$ 包含的是基本变量，$\mathbf{y}^2 = 0$。我们将矩阵 $\mathbf{B}$ 分划成 $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 | \mathbf{B}_2]$，其中 $\mathbf{B}_1$ 的列向量对应于 $\mathbf{y}^1$ 中的基本变量，因为 $\mathbf{B}_1$ 的列向量组成 E^m 中的基，所以 $\mathbf{B}_1$ 有逆；

根据 $By=b$，有 $y^1=B_1^{-1}b-B_1^{-1}B_2y^2$。现在令 $v^0=B_1^{-1}b$ 和 $v^j=B_1^{-1}b^j$，其中 b^j 表示 B_2 的第 j 列向量，得到

$$y^1=v^0-\sum_{j=1}^{n}y_j^2v^j \qquad (11.2)$$

如果 y^1 的每个分量都是整数，则得到最优解。所以我们假定 y_k^1 不是整数，则由(11.2)式

$$y_k^1=v_k^0-\sum_{j=1}^{n}y_j^2v_k^j \qquad (11.3)$$

令 w_k^j 和 θ_k^j 分别表示 v_k^j 的整数部分和小数部分、所以 $w_k^j\geqslant0$ 和 $0<\theta_k^j<1$。方程(11.3) 式可以写为

$$y_k^1=\left(w_k^0-\sum_{j=1}^{n}y_j^2w_k^j\right)+\left(\theta_k^0-\sum_{j=1}^{n}y_j^2\theta_k^j\right) \qquad (11.4)$$

现在如果我们希望 y_k^1 是整数，则由(11.4) 式看到，$y_j^2>0$ 至少对一个 j 成立。因 $\sum_{j=1}^{n}y_j^2\theta_k^j\geqslant0$ 和 $0<\theta_k^0<1$，引进约束

$$\theta_k^0-\sum_{j=1}^{n}y_j^2\theta_k^j\leqslant0 \qquad (11.5)$$

以便使 y_k^1 取得整值。当方程(11.5)式是紧约束对，它确定一超平面，我们把它作为新约束引入到原来的线性规划问题中。该约束因此方法提出者而得名，称为 **Gomory 截割**。因原来最优解对所有 j 是 $y_j^2=0$,这解不满足约束(11.5)式,所以当附加新约束时它变成不可行的。很清楚，根据我们的推导，原来问题的所有整值可行解也将满足(11.5)式。

例11-7 考虑整数线性规划问题，其中所有可行解的集合，用约束 x_1，$x_2\geqslant0$，$x_2\leqslant3$，$2x_1+x_2\leqslant6$ 以及 x_1 和 x_2 是整值来确定。我们希望借助于割平面法求得最优解，其中目标函数是 $f(x_1,\ x_2)=x_1+2x_2$

〔**解**〕 可行解通过图 11-5 中粗圆点表示，图还显示已

知目标函数的等值线。从图上我们看出，最优解是 $\mathbf{x}^*=[1, 3]^T$。把割平面法应用到该问题，使用 u_1 和 u_2 作为松弛变量，不等式约束可写为

$$0x_1+x_2+u_1=3$$
$$2x_1+x_2+u_2=6$$

其中 $x_1, x_2, u_1, u_2\geqslant 0$。令 $\mathbf{b}=[3, 6]^T$，$\mathbf{y}=[x_1, x_2, u_1, u_2]^T$ 和

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

且使用单纯形法(不管整数约束)，我们得到最优基本可行解 $\mathbf{y}^*=[1.5, 3, 0, 0]^T$。这时基本变量是 x_1 和 x_2，$\mathbf{y}^1=[1.5, 3]^T$ 和基本向量是 $\mathbf{b}^1=[0, 2]^T$ 和 $\mathbf{b}^2=[1, 1]^T$。所以

$$\mathbf{B}_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_1^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

通过直接计算得到 $\mathbf{v}^0=\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{b}=[1.5, 3]^T$，$\mathbf{v}^3=\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{b}^3=\left[-\frac{1}{2}, 1\right]^T$，和 $\mathbf{v}^4=\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{b}^4=\left[\frac{1}{2}, 0\right]^T$。这样(11.2)式变成

$$\begin{bmatrix} y_1^1 \\ y_2^1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1.5 \\ 3 \end{bmatrix}-y_3^2\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}-y_4^2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

因 y_1^1 不是整数，置 $k=1$，(11.4)-(11.5)式变为

$$y_1^1=1+\frac{1}{2}\left(1+y_3^2-y_4^2\right) \tag{11.6}$$

$$1+y_3^2-y_4^2\leqslant 0$$

图 11-5

其中 y_3^2 和 y_4^2 对应于向量 **y** 中的松弛变量，因此 $y_3^2=3-x_2$ 和 $y_4^2=6-2x_1-x_2$。在(11.6)式中使用 y_3^2 和 y_4^2 的这些表达式，得出新约束 $x_1\leqslant 1$。超平面 $x_1=1$ 截掉一部分可行域，如图 11-6 中阴影区域所示。很清楚，当 $x_1\leqslant 1$ 作为新约束引进时，旧约束 $2x_1+x_2\leqslant 6$ 是多余的。

现在新线性规划问题是在由 $0\leqslant x_1\leqslant 1$ 和 $0\leqslant x_2\leqslant 3$ 给定的集合上求 $\max f(x_1,x_2)=x_1+2x_2$。利用单纯形法，我们得到这问题的最优解 $\mathbf{x}^*=[1,\ 3]^T$，它也是整数线性规划问题的最优解。

习题与题解

11-1 （分配问题） 考虑例 11-1 中引进的分配问题，假定第 j 个盗贼在执行第 i 项工作时的效率为 e_{ij}。现在的问题是找出一种工作分配方案使总效率最大。

〔解〕 假定单独一件工作的效率用 0 到 1 的一个数来度

量。为方便起见，把数 e_{ij} 排列成矩阵的形式

$$E=\begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 & 0.6 \\ 0.2 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

当盗贼 j 被指定做工作 i，则删去矩阵 E 的第 i 行和第 j 列，现在定义集合

$I_k=\{i \mid E$ 的行 i 在结点 k 未被删去$\}$

$J_k=\{j \mid E$ 的列 j 在结点 k 未被删去$\}$

$B_k=\{(i,\ j) \mid E$ 的行 i 和列 j 在结点 k 被删去$\}$。

则在结点 k，集合 B_k 表示已经作出的部分分配，这种分配的效率为 $\sum\limits_{i,j\in B_k} e_{ij}$。余下的分配的效率充其量为以最大效率做每项工作时各项工作的效率总和，也就是 $\sum\limits_{i\in I_k}\left[\max\limits_{j\in J_k} e_{ij}\right]$。

因此，总效率的上界为

$$e_k=\sum_{(i,j)\in B_k} e_{ij}+\sum_{i\in I_k}\left[\max_{j\in J_k} e_{ij}\right] \tag{11.7}$$

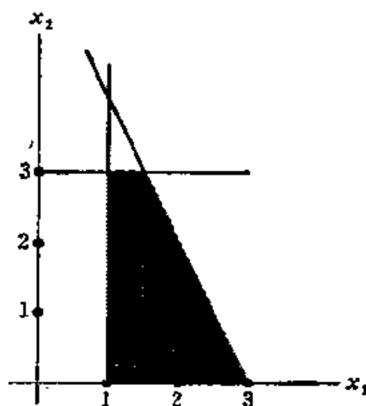


图 11-6

利用图 11-2 作为指导，借助于分支估界法求解此问题，我们首先可以得到总效率最大值的一个下界。这个下界是根据分配 $x_{11}=x_{22}=x_{33}=1$ 来计算的，得到 $e=0.7+0.3+0.4=1.4$。

在图11-2中的结点 1 处，总效率的上界由(11.7)式可得，为 $e_1=0.7+\max(0.3, 0.6)+\max(0.6, 0.4)=1.9$。因 e_1 比 e 大，所以细分结点 1 成结点 4 和 5；由(11.7)式，有 $e_4=0.7+0.3+\max(0.4)=1.4$。因 e_4 不大于 e，我们回到结点 1，并前进到结点 5。由(11.7)式，$e_5=0.7+0.6+\max(0.6)=1.9$，但因 e_5 大于 e，要再细分结点 5 得结点 11。根据(11.7)式，$e_{11}=1.9$；又因结点 11 是末端结点，总效率由于分配 $x_{11}=x_{32}=x_{23}=1$，而至少是 1.9，所以我们置 $e=1.9$。

现在结点 2 处，我们有 $e_2=0.5+\max(0.3,0.4)+\max(0.6, 0.4)=0.5+0.4+0.6=1.5$。因 e_2 小于 $e=1.9$，故不必对结点 2 进一步细分。

在结点 3 处，利用(11.7)式，有 $e_3=0.2+\max(0.3, 0.4)+\max(0.3,0.6)=0.2+0.4+0.6=1.2$；又因 e_3 小于 $e=1.9$，故不必对结点 3 进一步细分。因为现已考察了结点 0 的所有可能的细分，所以得出结论为最优分配是 $x_{11}=x_{32}=x_{23}=1$，具有最大总效率 1.9(单位)。这个解树如图 11-7所示。

11-2　考虑从日本运到美国 750 辆汽车的问题。假定有两种类型的船可供使用，它们具有如下特性：
可利用的燃料总额是 5500 加仑，可利用的海员总数是 90。从类型 1 的每条船赢利 2000 美元，从类型 2 每条船赢利1000 美元。假定船的供应是无限制的，为获得最大利润，求应该

	类型 1	类型 2
汽车数/每船	200	100
燃料(加仑/每次航行)	1200	700
船员定额	25	10

使用的每种类型的船数。

〔解〕 令 x_1 和 x_2 分别表示类型 1 和 2 的船数，显然 x_1 和 x_2 必须是整值的。上述约束可以写为

$$200x_1+100x_2\geqslant 750$$

$$1200x_1+700x_2\leqslant 5500$$

$$25x_1+10x_2\leqslant 90$$

$$x_1,\ x_2=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

要极大化的目标函数是 $f(x_1,\ x_2)=2000x_1+1000x_2$。在允许 x_1 和 x_2 是实值的这一条件下，用单纯形法解相应的线性规划，得到 $x_1=1.45$，$x_2=5.4$，最大利润 8300 美元。图 11-8画出了解树，图上用结点 0 表示上述情形。现在通过分别考虑情形 $x_1\leqslant 1$ 和 $x_1\geqslant 2$，将结点 0 细分为结点 1 和 2 。对结点 1 用单纯形法得最优解为 $x_1=1$，$x_2=6.15$，利润为 8150美元。对结点 2 最优解为 $x_1=2$，$x_2=4$，利润为 8000 美元。因 x_1 和 x_2 是整值的，我们不需进一步细分结点 2 。

在结点 1 所得利润比结点 2 多，所以如图 11-8 中所示，细分结点 1 为结点 3 和 4 。在结点 4 最优解是 $x_1=1$，$x_2=6$，利润为 8000 美元。在结点 3 最优解是 $x_1=0.5$，$x_2=7$，利润 8000 美元。结点 4 和 3 的进一步细分仅能得较低的利润，所以我们解得两个最优解：即 $x_1^*=2$，$x_2^*=4$或$x_1^*=1$，$x_2^*=6$；在两种情形中的任何一种，利润都为 8000 美元。

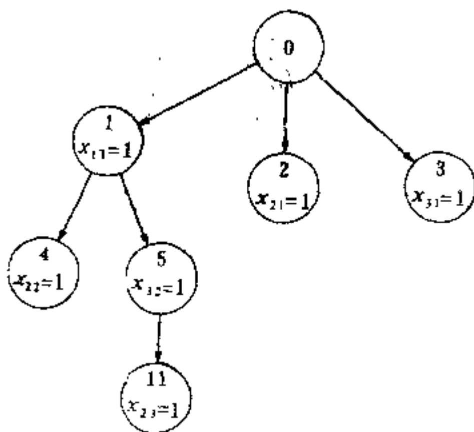


图 11-7

11-3 （背包问题） 考虑一组五件不可分割的物品，每件具有的重量和价值如下：

物品编号	重量	价值
1	18	27
2	12	9
3	15	30
4	16	16
5	13	6.5

问题是用这些物品装满背包，使总价值最大，而总重量不超过 45 单位。

〔**解**〕 我们首先以每单位重量所拥有的价值为序将这些物品排列如下：

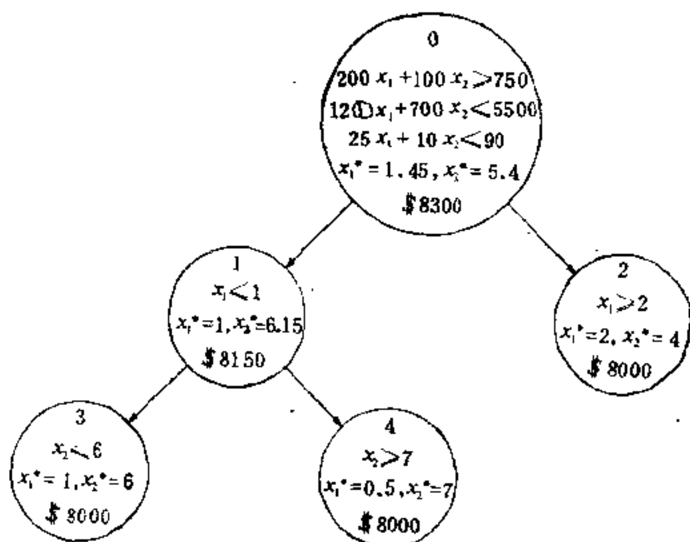


图 11-8

指标	物品编号	重　量	价　值	价值/重量
1	3	15	30	2
2	1	18	27	1.5
3	4	16	16	1
4	2	12	9	0.75
5	5	13	6.5	0.5

如果物品是可分割的,则我们可用编号为 3 的物品装填背包,它每单位重量拥有最大价值，直到背包的重量达到它可允许的限度。如果重量极限还未达到，则开始把编号为 1 的物品放入背包，因它每单位重量拥有第二大的价值。如果继续这一过程，则背包内将装有物品 3 和 1 的全部，加上物品 4 的 $\frac{3}{4}$，具有最大价值。这背包具有的重量和价值分别为15+18

$+\frac{3}{4}(16)=45$单位和$30+27+\frac{3}{4}(16)=69$单位。

因物品是不可分割的，上述的解答无效。但是我们可以继续从上表顶上开始取物品，直到不再有不可分割的物品能放入而又不超过重量极限为止。这手续使得放入的是全部物品 3 和 1，总重量和价值分别为 33 和 57 单位。显然这个解不是最优的，因为全部物品 3，1 和 2 的组合使总重量和价值分别为 45 和 66 单位。还要指出，具有极限总重量的任何组合的价值，当允许分割物品时总是还能增加的。

图 11-9 表示这问题用分支估界法建立起来的解树。在这个图中，标注$(i, j, \bar{k})$的结点表示包含指标i和j而不包含指标k的物品所有可能的组合。总价值的上界V可通过允许物品可分割性来计算。

结点 1 包括除指标 1 外的物品所有可能的组合，对结点 1 上界V的计算表示如下：

指标号	物品号	重　量	价　值
2	1	18	27
3	4	16	16
4	2	12	9

如果取编号为 1 和 4 的物品全部和编号 2 的物品的$\frac{11}{12}$，则背包总重量为$18+16+\frac{11}{12}(12)=45$单位，相应价值为$V=27+16+\frac{11}{12}(9)=51.25$单位。

另一方面，结点 2 表示包括指标 1 在内的物品的所有可能的组合，对结点 2 的上界的计算列表如下：

指标号	物品号	重　　量	价　　值
1	3	15	30
2	1	18	27
3	4	16	16

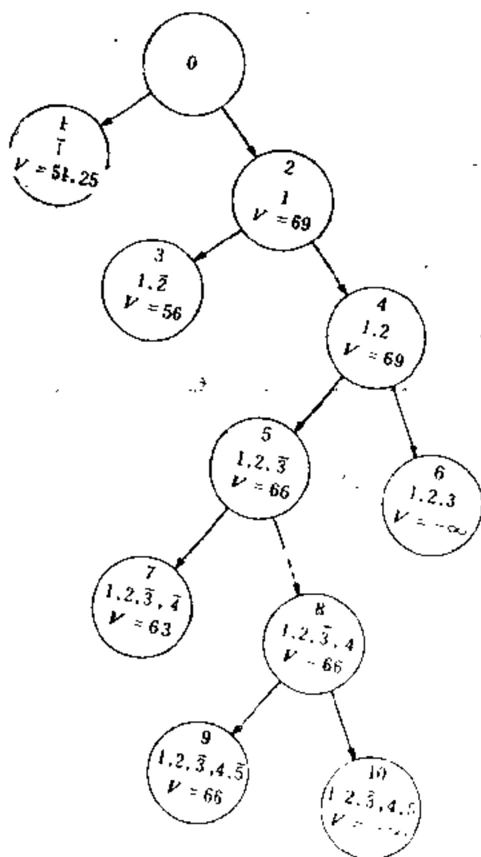


图 11-9

如果取全部物品3和1，以及物品4的$\frac{3}{4}$，则背包总重量为$15+18+\frac{3}{4}(16)=45$单位，相应价值为$V=30+27+\frac{3}{4}(16)=69$单位。

因在结点2总价值上界大于结点1，我们细分结点2为结点3和4。类似地，因结点4有较高的上界，再细分结点4为结点5和6。结点6表示的是不容许的物品组合，因它违反了总重量约束。于是我们对结点6置$V=-\infty$，如此继续直到末端结点9和10，其中结点9提供了已知物品的最优组合。

11-4 考虑如图11-10中所示的旅行推销员问题。在这个图中，A、B、C和D表示四城市，紧挨着连结每对城市的线的数字表示在这两城市间旅行所需要的时间。求回路周游城市的最短时间。

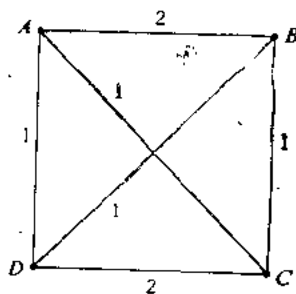


图 11-10

〔解〕 将图11-10中给出的时间数据以矩阵T_1的形式表示如下：

$$
\mathbf{T}_1 = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 10^7 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 10^7 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 10^7 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 10^7 \end{pmatrix} \end{array}
$$

在矩阵 $\mathbf{T}_1$ 中，A 行 B 列上的元素 2 给出了从城市 A 到城市 B 所需的时间，在 $\mathbf{T}_1$ 内的其他元素可用类似的方式解释。在 $\mathbf{T}_1$ 的所有对角元素取成很大的数10^7，为的是排除诸如从 B 城到 B 城的显然不必要的旅行。

现在如果从矩阵 $\mathbf{T}_1$ 的第 i 行的每个元素里减去一个常数，则实际上是把从城市 i 旅行到其他每个城市的时间减少了那个常数值。我们称此运算为行简化。类似地可以定义列简化运算。显然行或列简化都不改变最优回路周游，尽管旅行时间按简化矩阵 $\mathbf{T}_1$ 所使用的量而减小了。

现在将矩阵 $\mathbf{T}_1$ 每行减去 1，所以减去的总量为 4。所得简化矩阵 $\mathbf{T}_2$ 为

$$
\mathbf{T}_2 = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 10^7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 10^7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 10^7 \end{pmatrix} \end{array}
$$

同解释 T_1 的元素一样说明 $\mathbf{T}_2$ 的元素，注意到根据 A 行可知，从城市 A 到城市 C 或 D 所需时间少于从城市 A 到 B。类似的结论可从 $\mathbf{T}_2$ 的其他各行中作出。因在 $\mathbf{T}_2$ 的每行每列都至少有一个零，我们能形成费时为零的回路周游，一个这样的路线是 A、C、B、D、A。因回路周游所费时间是个非负的量，则路线 A、C、B、D、A是最优的。但是最少

时间的实际值不是零，而等于已减去的总额，在这里是4。

在有些情形．通过简化过程在简化矩阵里产生的零的分布方式，不允许形成零时间的回路周游。在这种情况下，简单的简化过程不产生最优解。

11-5　考虑旅行推销员问题，其中矩阵 $\mathbf{C}_1$ 表示在城市间旅行的费用

$$\mathbf{C}_1=\begin{matrix} & A & B & C & D \\ A & 10^7 & 5 & 3 & 3 \\ B & 4 & 10^7 & 6 & 1 \\ C & 2 & 5 & 10^7 & 2 \\ D & 1 & 3 & 4 & 10^7 \end{matrix}$$

求费用最小的回路周游路线。

〔解〕 首先将行 A、B、C、D 分别减去 2、1、2、1，并且列 B 和 C 分别减去 2 和 1。在减去总数为 2＋1＋2＋1＋2＋1＝9单位之后，简化矩阵为

$$\mathbf{C}_2=\begin{matrix} & A & B & C & D \\ A & 10^7 & 1 & 0 & 1 \\ B & 3 & 10^7 & 4 & 0 \\ C & 0 & 1 & 10^7 & 0 \\ D & 0 & 0 & 2 & 10^7 \end{matrix}$$

虽然 $\mathbf{C}_2$ 中每行每列都至少有一个零，但仍不能构成费用为零的回路周游。所以费用最小的回路周游的费用必定大于9。在图 11-11 中，我们构成由所有城市组成的结点 0，在费用上已知 9 单位为一下界($L.B.$)

现在将路线 AC 排除在考虑之外构成结点 1，这在图形中用 $\overline{AC}$ 表示。因路线 AC 被排除，必须从城市 A 到某个其

他的城市而不是城市 C，根据矩阵 $\mathbf{C}_2$，这样一次旅行的最小费用是 1 单位由城市 A 到城市 B。又必须从某城市而不是 A 到达城市 C；根据 $\mathbf{C}_2$，这样一次旅行的最小费用是 2 单位。这样，我们为排除 AC 必须付出总额为 3 单位的费用。在结点 1 下界变为 $L.B.=9+3=12$。

现在通过考虑结点 0 为所有包含路线AC的回路，来构造结点 2。因 AC 包括在回路中，所以可从 $\mathbf{C}_2$ 中消除 A 行 C 列得到

$$\mathbf{C}_3=\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array}\\ \begin{pmatrix} - & - & - & - \\ 3 & 10^7 & - & 0 \\ 0 & 1 & - & 0 \\ 0 & 0 & - & 10^7 \end{pmatrix}\end{array}$$

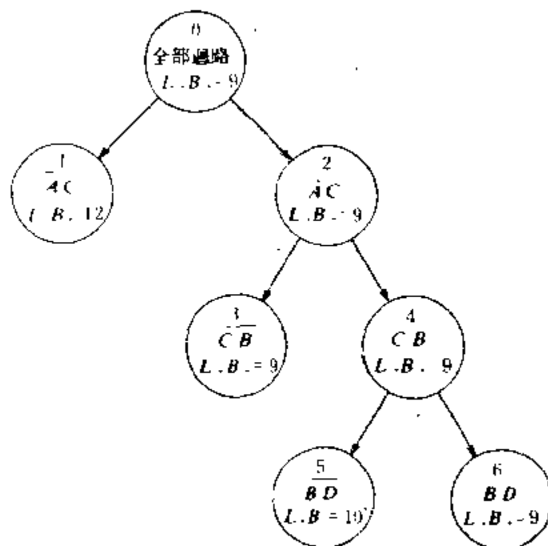


图 11-11

在 $\mathbf{C}_3$ 中每行每列至少有一个零，所以行和列的简化都是不必要的。因此可以说 $\mathbf{C}_3$ 是减去总量 0 单位后的简化矩阵，并且在结点 2 所有回路费用的下界变为 $L.B.=9+0=9$。

如图 11-11 所示通过分结点 2 为结点 3 和 4 来重复上述过程，并且算出相应的下界为 9 。结点 3 和 4 有相同的下界，可以对这些结点的任意一个细分。如图中所示细分结点 4 得结点 5 和 6 ，并且具有所指出的下界。因结点 5 有比结点 6 更高的下界，所以在结点 6 终止，最优回路周游路线是 A、C、B、D、A，费用 10 单位，这可根据 $\mathbf{C}_1$ 经过直接计算得到。

补 充 题

11-6 用 Gomory 割平面法解题 11-2。

11-7 用分支估界法解例11-4。

11-8 用 Gomory 割平面法解例 11-2。

11-9 考虑旅行推销员问题，其中推销员必须旅行四城市。令 C_{ij} 表示出城市 i 到城市 j 旅行所需费用，费用矩阵 $\mathbf{C}=[c_{ij}]$是

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 0 & 6 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 4 \\ 5 & 8 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

用分支估界法求费用最省的回路周游路线。

费用最省的回路周游路线由城市序列 1，3，4，2，1 组成。

11-10 用分支估界法解背包问题，其数据列于后，重量上界为65单位。

物品号	重 量	价 值
1	40	400
2	10	150
3	23	280
4	31	340

11-11 用割平面法解

$$\max[f(x_1, x_2)=15x_1+32x_2]$$

且使 $7x_1+16x_2\leqslant 52$

$3x_1+2x_2\leqslant 9$

$x_1, x_2\geqslant 0$

并且 x_1, x_2 是整数。

11-12 用割平面法求 $f(x_1, x_2)=x_1+3x_2$ 的极大，约束为 $0\leqslant x_2\leqslant 1.87$，$60x_1+28x_2\leqslant 165$，$x_1\geqslant 0$ 且 x_1，x_2 是整值变量。

11-13 用分支估界法解问题 11-12。

第十二章　动态规划

一、多段决策过程

动态规划是特别适用于多段决策过程的一个最优化方法。在这一节，我们介绍一般的多段决策过程的概念。这样的过程包含三个变量，即阶段变量、状态变量和决策变量。多段决策过程用含有这三个变量的数学方程来描述。阶段变量取数量值，它定义在一个区间上或在一个离散的点集上。为简单起见，我们假设阶段变量是定义在一个离散点集上的实值变量。因为阶段变量的值被看作离散的瞬时，所以我们在本章把阶段变量称作时间变量。

状态变量完全描述了在任意瞬时的决策过程，我们假设状态变量的值在每一个瞬时是有限维的向量，称为状态向量。决策变量表示在一个多段决策过程中采取的独立决策。也假设它的值是有限维向量，称为决策向量。设 x^i 和 u^i 分别表示第 i 个瞬时的状态向量和决策向量，一个多段决策过程可用如下形式表示：

$$x^{i+1}=g[x^i、u^i、i] \tag{12.1}$$

其中 $i=0、1、2、\cdots$，初始状态向量 x^0 是已知的。

状态向量 x^i 有如下基本特点：(1) 给定 x^i 和 u^i，则 x^{i+1} 是唯一的；(2) x^i 包含了关于决策过程在第 i 瞬时的全部有关的信息。这个条件意味着对于给定的 x^i 和 u^{i+k}，$k=0,1,2,\cdots$，任意未来的状态 x^j，$j>i$ 都能不用过去的状

态x^p，$p<i$ 的知识而计算出来。

假设决策者在第 i 个瞬时选择 u^i，那么在第 $i+1$ 瞬时，过程状态按照方程(12.1)从 x^i 变到 x^{i+1}。由于状态的这一改变，该过程的性能指标，按决策者所规定的某个目标函数，或者有改进，或者降低层次。多段决策过程就是在给定的一段时间中，寻找一系列决策向量，使过程的性能指标，按决策者所使用的目标函数的尺度为最好。

设决策者使用一个目标函数，是 x^i，u^i 和 i 的函数，记为 $J(x^i, u^i, i)$，并用此函数来度量系统在$[i, i+1]$时间段内的性能指标。N 段过程性能指标的总度量由

$$\sum_{i=0}^{N-1} J(x^i, u^i, i) \tag{12.2}$$

给出。由(12.1)式，对每个 $i>0$，x^i 是x^0和u^j，$j=0, 1, \cdots, i-1$ 的函数。所以 $J(x^i, u^i, i)$也是 x^0 和u^j，$j=0, \cdots, i-1$，的函数。过程性能指标的总度量由(12.2)式给定，所以它是x^0，N 和 u^j，$j=0, \cdots, N-1$ 的函数，用 $J(x^0, N, u^0, \cdots, u^{N-1})$表示，即

$$J(x^0, N, u^0, \cdots, u^{N-1}) = \sum_{i=0}^{N-1} J(x^i, u^i, i) \tag{12.3}$$

通常 $J(x^i, u^i, i)$的值称为过程在第 i 段的成本增量，而 $J(x^0, N, u^0, \cdots, u^{N-1})$称为在$N$个阶段过程中的总成本。多段决策过程就是求 $J(x^0, N, u^0, \cdots, u^{N-1})$ 关于决策向量 $u^0, \cdots, u^{N-1}$ 的极值。为明确起见，我们考虑 $J(x^0, N, u^0, \cdots, u^{N-1})$关于 $u^0, \cdots, u^{N-1}$求极小的问题。

这个求极小的问题，会因为出现加在 x^i 和u^i容许值上的约束而复杂化。这样的约束例子如果从自然的考虑出发，x^k

和 u^i 则要求属于某个给定的子集：

$$x^i \in X(i) \tag{12.4}$$

$$u^i \in U(x^i, i) \tag{12.5}$$

最简单的约束是形如 $\alpha^i \leqslant u^i \leqslant \beta^i$ 和 $u^i \leqslant x^i \leqslant \lambda^i$ 的长度约束。后面我们将看到，这样的约束实际上简化了求解的数值计算工作。

二、穷举法

求解极小问题的一个明显的方法，就是对所有可能采取的决策序列$(u^0,\cdots,u^{N-1})$求成本函数的值，并由直接检查值的大小得到最优解。这个方法称为**穷举法**，它仅当对于每个 i，$U(x^i, i)$只包含有限个元素时，才是可行的。设 $x^i \in X(i)$表示第 i 个瞬时的一个容许状态，在方程(12.1)中使用 $u^i \in U(x^i, i)$，就得到从 x^i 可到达的状态 x^{i+1} 的一个有限集合。然后对所有的使 $x^{i+1} \in X(i+1)$的 u^i，按 $J(x^i, u^i, i)$计算第 i 段的成本增量，并把这个结果加到从 x^0 到 x^i 所算出的成本上，从而得到从x^0 到达 x^{i+1}的总成本。重复这个过程直到 $i=N-1$。在这一过程结束后，就得到 $J(x^0, N, u^0,\cdots u^{N-1})$关于序列 u^0，…，u^{N-1} 的所有容许选择的值。直接检查这些值，就会得到最优决策的向量序列。

例 12-1 考虑一个多段决策过程，在每个瞬时 i 它的状态由一个数值变量x^i给定，同时数值决策变量 u^i 仅有两个可能的选择。图中表明了当 $N=5$，并且所有 x^i被约束在$[0, \beta]$中的情况下，穷举法在这个过程的应用。

[解] 图12-1表明了状态变量随时间的变化。图中，在

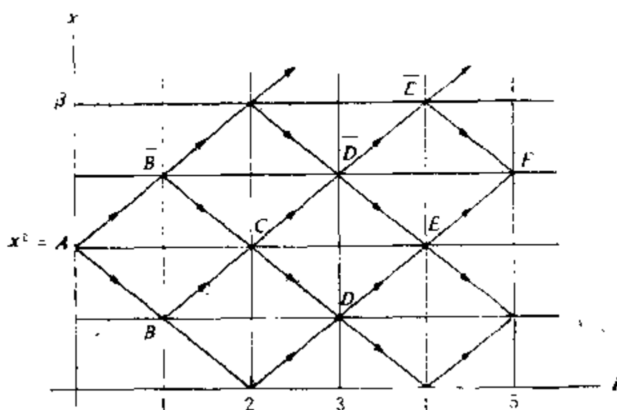


图 12-1

$i=2$ 和 $i=4$，x^i 的某个容许值产生的 x^{i+1} 的值，违背约束 $0 \leqslant x^i \leqslant \beta$，因此相应的 u^i 的值就不是容许的。图12-1的每一条路径(由一系列箭头表示)都对应于一个从容许初始状态 x^0 到容许最后状态 x^5 的总成本。直接比较这些总成本的值，就可以求出最小成本以及图12.1中与之相对应的路径。值得注意的是，对所有的 i，约束 $0 \leqslant x^i \leqslant \beta$ 限制了 x^i 可能值的范围，这实际上简化了问题的求解。

三、最优性原理

穷举法的主要缺点在于，因为要逐一列举所有容许的向量序列，所以当 N 的值较大(但并非不合理的大)以及 x^i 的维数较高时，要求巨大的存储量。Bellman 发展了动态规划方法，逐次地求解可以叙述成多段决策过程的那种极小问

题。这个方法的基础是最优性原理。现在由图12-1推导这一原理。

考虑图12-1的由状态序列$ABCDEF$表示的路径、并设这是由 $x^0=A$ 到达 $x^5=F$ 的最优路径。在此假设下，这条路径的一段$CDEF$ 也是由 $x^2=C$ 到达F的最优路径。可用反证法证明这个事实，设 $C\bar{D}\bar{E}F$ 是从C到F的最优路径，那么相应于$C\bar{D}\bar{E}F$ 的总成本就小于相应于$CDEF$的总成本，从而相应于$ABC\bar{D}\bar{E}F$ 的总成本就小于相应于 $ABCDEF$ 的总成本，而这和我们假设 $ABCDEF$ 是最优路径相矛盾。这里应注意，不论 $x^2=C$ 的前一点是 $x^1=B$ 或是 $x^1=\bar{B}$，从 C 开始的最优路径$CDEF$ 都不变化。总结上述分析，我们有如下原理：

最优性原理：一个最优决策序列有这样的性质，不论过去的状态和决策如何，剩下的决策总是构成一个关于由过去的决策所产生的状态的最优决策序列。

四、泛函方程

设 $I(\mathbf{x}^j,N-j)$表示从 $\mathbf{x}^j\in X^j$ 开始的 $(N-j)$ 段决策过程的最小成本，即

$$I(\mathbf{x}^j,N-j)=\min_{\substack{\mathbf{u}^i\in U\\ i=j,\cdots,N-1}}\left\{\sum_{i=j}^{N-1}J(\mathbf{x}^i,\mathbf{u}^i,i)\right\} \tag{12.6}$$

上面的表达式也可以写为

$$I(\mathbf{x}^j,N-j)=\min_{\substack{\mathbf{u}^i\in U\\ i=j,\cdots,N-1}}\left\{J(\mathbf{x}^j,\mathbf{u}^j,j)+\right.$$

$$+\sum_{i=j+1}^{N-1} J(\mathrm{x}^i, \mathrm{u}^i, i)\Bigg\}$$

由最优性原理

$$I(\mathrm{x}^j, N-j)=\min_{\substack{\mathrm{u}^i \in U \\ i=j+1,\cdots,N-1}}\Bigg\{J(\mathrm{x}^j, \mathrm{u}^j, j)+\sum_{i=j+1}^{N-1} J(\mathrm{x}^i, \mathrm{u}^i, i)\Bigg\} \tag{12.7}$$

上式中 $J(\mathrm{x}^j, \mathrm{u}^j, j)$是和 $\mathrm{u}^i, i=j+1, \cdots, N-1$ 的选取无关的，因此(12.7)式又可写成

$$I(\mathrm{x}^j, N-j)=\min_{\mathrm{u}^j \in U}\Bigg\{J(\mathrm{x}^j, \mathrm{u}^j, j)+\min_{\substack{\mathrm{u}^i \in U \\ i=j+1,\cdots,N-1}}\sum_{i=j+1}^{N-1} J(\mathrm{x}^i, \mathrm{u}^i, i)\Bigg\} \tag{12.8}$$

由(12.6)式给出的定义

$$\min_{\substack{\mathrm{u}^i \in U \\ i=j+1,\cdots,N-1}}\Bigg\{\sum_{i=j+1}^{N-1} J(\mathrm{x}^i, \mathrm{u}^i, i)\Bigg\}=I(\mathrm{x}^{j+1}, N-j-1)$$

因此(12.8)式成为

$$I(\mathrm{x}^j, N-j)=\min_{\mathrm{u}^j \in U}\Big\{J(\mathrm{x}^j, \mathrm{u}^j, j)+I(\mathrm{x}^{j+1}, N-j-1)\Big\} \tag{12.9}$$

而x^{j+1}是由(12.1)式确定的。方程(12.9)称为**动态规划的泛函方程**。它给出了一个递推格式，可以从给定的$I(\mathrm{x}^{j+1}, N-j-1)$和$x^{j+1} \in X^{j+1}$对所有$\mathrm{x}^j \in X^j$求出$I(x^j, N-j)$。由(12.9)式右端极小化步骤，我们得到了最优的u^j。为了

用(12.9)递推地求$I(x,0)$，必须从$N-1$段开始并且计算

$$I(\mathbf{x}^{N-1},1)=\min_{\mathbf{u}^{N-1}\in U} J(\mathbf{x}^{N-1},\ \mathbf{u}^{N-1},\ N-1) \tag{12.10}$$

泛函方程(12.9)也可以直观地推导出来，设$\mathbf{x}^i$是过程在第i瞬时的状态，我们要求最优决策向量$\mathbf{u}^i$。对每一个$\mathbf{u}^i$由(12.1)式得到$\mathbf{x}^{i+1}$的一个特殊的值，在$i+1$瞬时的每一个$\mathbf{x}^{i+1}$，都至少有一个最优路径到达终点$\mathbf{x}^N$的一个允许值。因此，从$\mathbf{x}^i$开始的总成本将不会大于$J(\mathbf{x}^i,\mathbf{u}^i,i)+I(\mathbf{x}^{i+1},\ N-i-1)$，如(12-9)式右端所表示的那样，从$\mathbf{u}^i$极小化这个表达式，就得到最优的$\mathbf{u}^i$。方程(12.9)和(12.10)确定了一个序列极小化过程，每一次迭代都给出了一个决策向量。$\mathbf{u}^{j+k}$，$k=1,\cdots,N-j-1$的最优值必须在确定$\mathbf{u}^j$前计算出来，这个方法显然是和穷举法不同的。穷举法是同时给出所有决策向量的最优值，在极小化问题中的计算量也简化了，因为$\min\limits_{\mathbf{u}^0,\cdots,\mathbf{u}^{N-1}} J(\mathbf{x}^0,N,\mathbf{u}^0,\cdots,\mathbf{u}^{N-1})$被一系列极小化问题所代替，而其中每个极小化问题仅仅包含一个决策向量。为了从(12.9)式得到$\mathbf{u}^j$的最优值，必须知道$I(\mathbf{x}^{j+1},\ N-j-1)$。因此，对于$\mathbf{x}^{j+1}$的每个容许值必须贮存$I(\mathbf{x}^{j+1},\ N-j-1)$的值。一般地，$\mathbf{x}^{j+1}$的容许值的数目是随$\mathbf{x}^{j+1}$分量的数目而增加的，因此对很大的状态向量，存贮问题成了能否使用这个方法的一个关键。

例 12-2 考虑N段决策过程，在每一段状态变量和决策变量有P个值，试求为了获得决策量的最优值，在用(a)穷举法和(b)动态规划方法时，所需做加法和比较的总次数。

[解] (a) 因为变量$\mathbf{x}^0$和$\mathbf{u}^0,\cdots,\ \mathbf{u}^{N-1}$中的每一个可能有$P$个值，所以最优化问题有$P^{N+1}$个可行解。对每个

可行解，总成本是将每一段的成本增量相加得到的。如果在每一次有两个成本增量相加，那么就要完成$(N-1)P^{N+1}$次加法。为了由穷举法得到总成本的最优值，就要求对总成本的P^{N+1}个值比较$P^{N+1}-1$次，因此，对于穷举法，要求$NP^{N+1}-1$次加法和比较。

(b) 在动态规划中，由(12.9)式对$\mathbf{x}^j$和$\mathbf{u}^j$，$0\leqslant j\leqslant N-1$的每个值，我们要做一次加法，所以总共要求$(N-1)P^2$次加法。由(12.9)式还可注意到，在每一段对每个$\mathbf{x}^j$的值，我们要求$P-1$次比较，在方程(12.10)中要求再作$P-1$次比较。因此整个比较的数目为$NP(P-1)+(P-1)$，全部加法和比较的数目为$(2N-1)P^2-(N-1)P-1$。当N增加时，对于穷举法来说加法和比较的总次数是随N指数增加的，而在动态规划中则是线性增加的。

例 12-3 (资源分配)有一个投资公司，将资金投资于不动产和油井。可投向不动产和油井的资本总数分别不得超过b_1和b_2，整个用于投资的资本不得超过b_3。问题是在利润和投资额成线性关系的假设下求投资公司的最大利润。

[**解**] 这个问题不必作为多段决策过程，而且它也可以由另外的方法解决(见附录中例 A-1)。然而，这里我们将把它看作一个多段决策过程，并且用动态规划来解决它。设u_1和u_2分别表示对不动产和油井的投资，由它们的实际意义应有u_1，u_2，b_1，b_2，$b_3\geqslant 0$，且对投资的约束为$0\leqslant u_1\leqslant b_1$，$0\leqslant u_2\leqslant b_2$，$0\leqslant u_1+u_2\leqslant b_3$。设$2u_1+4u_2$表示由投资$u_1$和$u_2$得到的全部利润，问题是求$2u_1+4u_2$对$u_1$和$u_2$在给定约束下的最大值。

我们把每一个投资决策看作在两段决策过程的一段中的一个决策的结果，状态变量是每一段开始时投资的资本。设x_{k}

表示状态变量，则有

$$x_0 = b_3,\quad x_1 = x_0 - u_1,\quad x_2 = x_1 - u_2$$

图 12-2 表示了我们所建立的两段决策过程

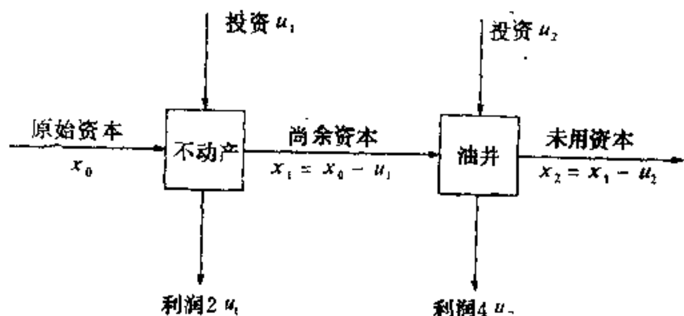


图 12-2

因为节省的资本得不到利润，所以我们在两段过程的最后一段，在服从于给定约束下将所有的资本都作为投资，因此 $u_2^* = Min(x_1, b_2)$，由这项投资所得利润的最大值为 $I(x_1, 1) = 4u_2^* = 4\min(x_1, b_2)$。

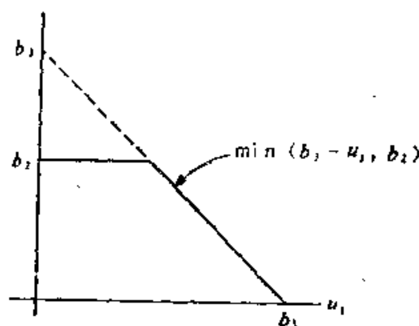


图 12-3

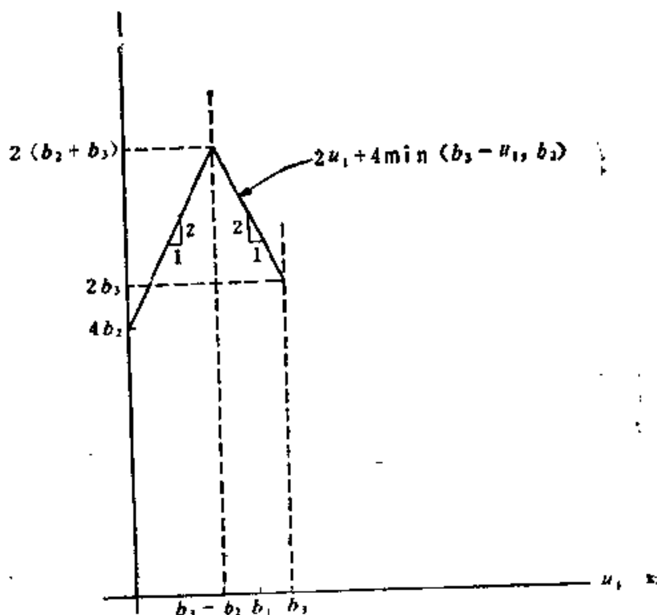


图 12-4

下一步，u_1 的最优值可由递推公式(12.9)得到，则

$$
\begin{aligned}
I(x^0,2) &= \max_{0 \leqslant u_1 \leqslant b_1} [2u_1 + 4\min(x_1, b_2)] \\
&= \max_{0 \leqslant u_1 \leqslant b_1} [2u_1 + 4\min(x_0 - u_1, b_2)] \\
&= \max_{0 \leqslant u_1 \leqslant b_1} [2u_1 + 4\min(b_3 - u_1, b_2)]
\end{aligned}
$$

这里 $I(x^0, 2)$表示了整个利润的最大值，图 12-3 表示了函数$\min(b_3-u_1, b_2)$，图 12-4 表示了函数 $2u_1+4\min(b_3-u_1, b_2)$。设 $b_1 \geqslant b_3-b_2$，由图 12-4 可看出 $u_1^*=b_3-b_2$，

$u_2^*=\min(b_3-u_1^*,\ b_2)=b_2$，所以最大利润为 $I(x^0,2)=2u_1^*+4u_2^*=2b_3+2b_2$。因为对同样的投资，油井的利润两倍于不动产，所以显然应尽可能多的投资于油井，剩余资金再投资于不动产，用动态规划求得的 u_1 和 u_2 的最优值，满足资本在这两个投资项目上的这一分布。

例 12-4 (旅行推销员)有一个推销员，他想从城市 0 开始旅行 $N+1$ 个城市。设 d_{ij} 表示在第 i 城市到第 j 个城市之间的距离，$0\leqslant(i,\ j)\leqslant N$，求他经过且只经过每个城市一次的回路周游的最短路程。

［**解**］ 这里提出的旅行推销员问题，可以用整数规划和分支估界法解决(见第十一章)，然而，我们将把这个问题作为一个多段决策过程，并得出类似于(12.9)式的递推格式，从而求得问题的解。

假设作最优的周游，推销员已经到达城市 i，在回到城市0之前还有 $k(j_1、\cdots,j_k)$个城市未去，因为周游是最优的，所以从城市 i 按某个顺序经过城市 j_1，…，j_k 然后回到城市 0 的路线必须是长度最小的。定义 $D(i\,|\,j_1,\ \cdots,\ j_k)$ 是从城市 i 到城市 0 通个剩下的 k 个未访问城市一次且仅一次的最短路程的长度。这样，当我们计算了 $D(0\,|\,j_1,\ \cdots,\ j_k)$以后，问题就解决了，由上面的定义，我们得到

$$D(i\,|\,j_1,\ \cdots,\ j_k)=\min_{1\leqslant m\leqslant k}[d_{ij_m}+D(j_m\,|\,j_1,\ \cdots,\ j_{m-1},\ j_{m+1},\ \cdots,\ j_k)] \qquad (12.11)$$

这是对所有的 i 求 $D(i\,|\,j_1,\ \cdots,\ j_k)$的一个递推格式，我们由下式开始计算

$$D(i\,|\,j)=d_{ij}+d_{j0}$$

且当$D(0|j_1, \cdots, j_N)$求出时，就终止迭代。

例 12-5 估计由动态规划解旅行推销员问题所要求的存储量。

为了应用递推格式(12.11)，需要贮存函数$D(i|j_1, \cdots, j_k)$的值，这里仅需考虑全部的$j_1, \cdots, j_k$值，而不需要考虑从第i个城市回到城市0之前访问这k个城市的顺序，因此贮存$D(i|j_1, \cdots, j_k)$的值等价于贮存从$N-1$个量中选择k个量的可能方式，当K是最接近$\frac{N-1}{2}$的整数时要求的储存是最大的。设$2m+1$表示城市的数目，用Stirling公式近似$\binom{2m}{m}$的值，可以得到下面的表格，表中给出了要求储存的上界。

城市数目$2m+1$	储存量上界
11	300
17	12000
21	200000

这个表表明，动态规划的主要不足是，当多段决策过程状态向量的分量数目增加时，目标函数储存值的总数也增加，而且很快超过许多现代计算机的存储能力。

五、单状态变量时的计算要求

本节我们更详细地考虑由递推公式(12.9)提出的计算要求。方程(12.9)简化了极小化的计算，因为在公式中只是对

u^j 取极小，而不是对 u^j，…，u^{N-1}。然而，作为这一计算简化的代价，必须对 x^{j+1}的所有容许值存储 $I(x^{j+1}, N-j-1)$的值，在例12-5中我们可以看出，这个存储的要求甚至对现代计算机也成了关键所在。

为了对计算格式有更深了解，考虑下面的问题：$\max\limits_{u_j\geq 0} \sum\limits_{j=1}^{N} g_j(u_j)$，约束条件为$\sum\limits_{j=1}^{N} u_j = x$。为了将这个问题变为一个多段决策过程，定义 $J(u_1, \cdots, u_k) = \sum\limits_{j=1}^{K} g_j(u_j)$ 及 $I(x, k) = \max\limits_{\substack{u_j\geq 0 \\ \sum_{j=1}^{k} u_j = x}} J(u_1, \cdots, u_k)$，由(12.9)式给出的递推公式，成为

$$I(x, k) = \max_{0\leq u_k\leq x} [g_k(u_k) + I(x-u_k, k-1)] \tag{12.12}$$

其中设 $I(x, 1) = g_1(x)$。

为了利用公式(12.12)给出的递推格式，必须对 x 的所有容许值计算和存储 $I(x, k)$的值、假定 x 的容许值在区间$[0, x_0]$中，我们在$[0, x_0]$中取一些节点 0，Δ，2Δ，…，$R\Delta = x_0$，然后计算和存储 $I(x, k)$在这些节点上的值，为了得到在$[0, x_0]$中异于节点的 x 所对应的 $I(x, k)$ 的值，可以用内插公式

$$I(x,\ k)=I(m\Delta,k)+(x-m\Delta)\times\frac{I[(m+1)\Delta,k]-I(m\Delta,\ k)}{\Delta}$$

下面讨论式(12.12)中的极大化运算，当决策变量只在有限个值的集合上取值时，目标函数的极大值可用穷举法得到。因此，我们用和$[0,\ x_0]$上同样的节点的集合，在$[0,x]$上离散化决策变量u_k，然后使u_k在这些节点上由穷举法得到目标函数的极大值。由于对连续变量的离散化，这个极大化的公式仅仅是对目标函数真正极大值的一个近似。如果间隔Δ很小，就有大量的节点，会得到很好的近似，但是却要求大量函数值的计算和大量的存储。另一方面，如果Δ太大，虽然只有不多几个函数值，存储也少，但近似程度很差，下面由计算$g_j(m)$，$0\leqslant m\leqslant R$，$1\leqslant j\leqslant N$开始，更详细地讨论计算公式。$I(x,\ 1)=g_1(x)$是在$[0,\ x_0]$的节点上由值的离散集合得到的，用(12.12)式可得

$$I(x,\ 2)=\max_{0\leqslant u_2\leqslant x}[g_2(u_2)+I(x-u_2,\ 1)]$$

因为我们已经将u_2值的范围离散化了，所以上面的方程可近似为：

$$I(x,\ 2)=\max_{m=0,\cdots,R}[g_2(m\Delta)+I(x-m\Delta,1)] \tag{12.13}$$

这里x在$[0,\ x_0]$的节点集合上变化，(12.13)可由穷举法求极大，这个极大化的过程可由一对对地比较函数值实现。在这个过程中，比较$g_2(0)+I(x,1)$和$g_2(\Delta)+I(x-\Delta,1)$的值，而且仅保留大的一个；这个值又和$g_2(2\Delta)+I(x-2\Delta,\ 1)$比较，又一次保留大的一个；由此过程在作完全部比较后得到(12.13)式的极大值。这里得到了$I(x,\ 2)$在

$[0, x_0]$的所有节点的值，在这个过程中也得到了 u_2 的最优值，它显然与 x 的值有关。

在两段结束时，计算结果可以存放在表(12-1)中。显然，如果计算的阶段多于2，表12-1就有更多的列。这个数值表可以用来求出两段决策过程的最优解。给定 x 的值，由表可得 $u_2(x)$的最优值。因为 $u_1(x)+u_2(x)=x$，由 $u_1(x)=x-u_2(x)$可得 $u_1(x)$的最优值。

表12-1

X	I(X,1)	u_1(X)	I(X,2)	u_2(x)
0	×	×	×	×
△	×	×	×	×
2△	×	×	×	×
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
R△	×	×	×	×

例12-6 设 $g_j(x)=xe^{-jx}$，$j=1, 2$， 求

$$\max\sum_{j=1}^{2} g_j(u_j)$$

约束条件为

$$\sum_{j=1}^{2} u_j=x, \qquad\qquad 0\leqslant x\leqslant 2$$

［解］ 函数 $g_j(x)$由图12-5给出。设 $I(x,1)=g_1(x)$，则 $I(x, 1)=xe^{-x}$，取 $\Delta=\frac{1}{2}$，则由区间$[0, 2]$得到节点0，$\frac{1}{2}$，1，$\frac{3}{2}$，2，表12-2列出了 x 和 $I(x, 1)$在节点的数值。然后，用(12.13)式计算 $I(x, 2)$，例如：

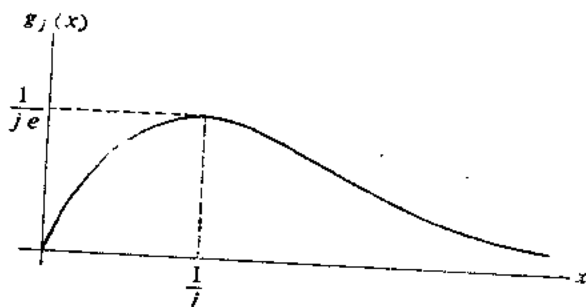


图 12-5

$$I\left(\frac{3}{2},2\right)=\max\left[m\Delta e^{-2m}+I\left(\frac{3}{2}-m\Delta,\ 1\right)\right]$$

$$=\max\left[I\left(\frac{3}{2},\ 1\right),\ \frac{1}{2}e^{-1}+I(1,\ 1),\ e^{-2}\right.$$

$$\left.+I\left(\frac{1}{2},\ 1\right),\ \frac{3}{2}e^{-3}+I(0,\ 1)\right]$$

$$=\max\left[\frac{3}{2}e^{-3/2},\ \frac{3}{2}e^{-1},\ e^{-2}+\frac{1}{2}e^{-1/2}\right.$$

$$\left.\times\frac{3}{2}e^{-3}\right]=\frac{3}{2}e^{-1}$$

这个值对应于$u_2\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}$，因此$u_1=\frac{1}{2}$，表 12-2 的值可由内插得到[0, 2]中任意x对应的$I(x,\ 2)$的值，例如，若$x=\frac{5}{4}$，由线性内插公式得

$$I\left(\frac{5}{4}, 2\right)=I(1, 2)+\left(\frac{5}{4}, 1\right)\frac{I(3/2, 2)-I(1, 2)}{1/2}$$

$$=I(1, 2)+\frac{1}{2}\left[I\left(\frac{3}{2}, 2\right)-I(1, 2)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[I(1, 2)+I\left(\frac{3}{2}, 2\right)\right]=e^{-1}+\frac{1}{4}e^{-1/2}$$

表12-2

X	I(x,1)	$u_1(x)$	I(x,2)	$u_2(x)$
0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}e^{-1/2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}e^{-1/2}$	0
1	e^{-1}	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}e^{-1}+\frac{1}{2}e^{-1/2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}e^{-3/2}$	1	$\frac{3}{2}e^{-1}$	$\frac{1}{2}$
2	$2e^{-2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}e^{-1}+\frac{3}{2}e^{-3/2}$	$\frac{1}{2}$

六、两个状态变量时的计算要求

本节我们讨论多段决策过程的状态向量维数增加时所遇到的困难。具体地说，我们讨论问题

$$\max\sum_{j=1}^{N}g_j(u_j)$$

约束条件为

$$u_j\geqslant 0, \qquad 1\leqslant j\leqslant N$$

$$\sum_{j=1}^{N}\alpha_j u_j=x, \quad \sum_{j=1}^{N}\beta_j u_j=y$$

为了将这个问题变为一个多段决策过程，定义 $J(u_1, \cdots, u^k)=\sum_{j=1}^{K} g_j(u_j)$ 和 $I(x, y, k)=\max J(u_1, \cdots, u_k)$，约束条件为 $u_j \geqslant 0$，$1 \leqslant j \leqslant k$，$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j u_j = x$，$\sum_{j=1}^{K} \beta_j u_j = y$，注意到 $I(x, y, k)$ 是两个状态变量 x 和 y 的函数，对 x 和 y 的每一对容许值必须储存 $I(x, y, k)$ 的值。换言之，对 y 的每一个容许值必须储存一个类似于表 12-1 的数值表，当状态变量的数目进一步增加时，这个储存的要求会更高。

克服这种困难的一个途经是用 Lagrange 乘子。使用 Lagrange 乘子 λ，形成一个新的目标函数

$$F(u_1, \cdots, u_N)=\sum_{j=1}^{N} g_j(u_j)+\lambda\left(\sum_{j=1}^{N} u_j - y\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{N}[g_j(u_j)+\lambda u_j]-\lambda y$$

现在用动态规划的方法选择 λ 的值，使这个新的目标函数 $F(u_1, \cdots, u_N)$ 取极大，约束条件为 $u_j \geqslant 0$，$1 \leqslant j \leqslant N$，$\sum_{j=1}^{N} u_j = x$，对一个给定的 λ 值，这个新的极大化问题是和前一节讨论的问题相类似的，而且比原问题要求的储存更少。这样，我们用一系列仅仅包含一个状态变量的问题代替了包含两个状态变量的问题。下面的例子表明了恰当选择 λ 的值会得到原问题的解。

例 12-7 解下列问题

$$\min \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} u_j^2$$

约束条件为

$$u_j \geqslant 0, \qquad 1 \leqslant j \leqslant 2$$

$$u_1 + u_2 = 8, \quad 2u_1 + u_2 \leqslant 10$$

用 Lagrange 乘子 λ，我们得到

$$F(u_1, u_2) = \frac{1}{2}u_1^2 + 2\lambda u_1 + \frac{1}{2}u_2^2 + \lambda u_2 - \lambda 10$$

对这个新的目标函数必须在 u_1，$u_2 \geqslant 0$ 和 $u_1 + u_2 = 8$ 的约束下求极小。这个新问题类似于例12-3中讨论过的资源分配问题。设 x_k 表示第 k 段的状态变量 x，则有

$$x_0 = 8$$

$$x_1 = x_0 - u_1$$

$$x_2 = x_1 - u_2$$

图12-6表明了我们建立的两段决策过程。

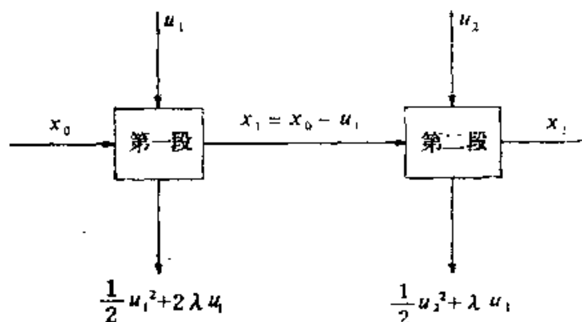


图 12-6

设 $\lambda = 0$，则得到 $F(u_1, u_2) = \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2)$，其计算类似于例12-2，但最优解是 $u_1^* = u_2^* = 4$，显然 $2u_1^* + u_2^* = 12$，

最优解不满足给定的约束 $2u_1+u_2\leqslant10$。为了改进这个解，置 $\lambda=5$，得到 $F(u_1,u_2)=\frac{1}{2}u_1^2+10u_1+\frac{1}{2}u_2^2+5u_2-50$，用类似于例12-2的方法极小化这个目标函数，得到 $u_1^*=1.5$，$u_2^*=6.5$。显然 $2u_1^*+u_2^*=9.5<10$，因而满足约束 $2u_1+u_2\leqslant10$。然而，目标函数 $\frac{1}{2}(u_1^2+u_2^2)$ 可能尚未达到满足给定约束的最低的可能值。为了检查这个可能性，我们必须用另外的 λ 的值。从前面的计算中我们知道，λ 的恰当值是在[0,5]中，所以设 $\lambda=4$，则得 $F(u_1,u_2)=\frac{1}{2}u_1^2+8u_1+\frac{1}{2}u_2^2+4u_2-40$。用例12-2的方法极小化这个函数，可得 $u_1^*=2$，$u_2^*=6$。显然 $2u_1^*+u_2^*=10$，满足约束条件。对于 λ 和 u_1，u_2 的不同的值，原来目标函数 $\frac{1}{2}(u_1^2+u_2^2)$ 的值给定如下：

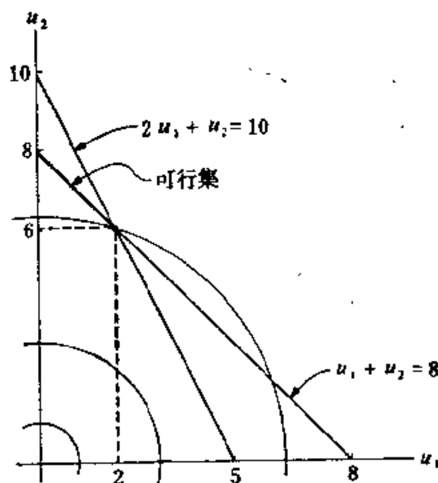


图 12-7

由图12-7可看出，λ 的恰当值是4，满足给定约束的极小值是20。

λ	$u_1{}^*$	$u_2{}^*$	$\frac{1}{2}(u_1^{*2}+u_2^{*2})$	是否违背约束条件
0	4	4	16	是
4	2	6	20	否
5	1.5	6.5	20.25	否

七、无穷阶段过程和逐次逼近

若 $N=\infty$，则多段决策过程成为一个无穷阶段过程。这样的过程可能没有直接的实际意义，但以它作为近似经常是有用的。我们设 $g(\mathbf{x}^j, \mathbf{u}^j, j)$和 $J(\mathbf{x}^j, \mathbf{u}^j, j)$明显地与 j 无关，而且当 $N\to\infty$ 时，$I(x,N)\to I(x)$。当 $N\to\infty$ 时，(12.9)式变为

$$I(\mathbf{x})=\min_{\mathbf{u}\in U}[J(\mathbf{x}, \mathbf{u})+I(g(\mathbf{x}, \mathbf{u}))] \qquad (12.14)$$

方程(12.14)是未知函数 $I(x)$ 的泛函方程。对许多的多段决策过程，(12.14)式可以解析地解出。在其它情况下，(12.14)式可用数值方法求近似解。由 $I(\mathbf{x})$给出的(12.14)的解和最小化决策向量 $\mathbf{u}^i(\mathbf{x})$ 可分别作为 $I(\mathbf{x}, i)$和 $\mathbf{u}^i(\mathbf{x})$ 的近似，对很大的 i，这个近似是很好的，而且节省了由式(12.9)和(12.10)计算 $I(\mathbf{x}, i)$和 $\mathbf{u}^i(\mathbf{x})$的计算量。

现在讨论解方程(12.14)的两种逐次逼近方法，第一种方法是定义 $I(\mathbf{x})$的第 i 个逐次近似为

$$I_i(\mathbf{x})=\min_{\mathbf{u}\in U}[J(\mathbf{x},\mathbf{u})+I_{i-1}(g(\mathbf{x},\mathbf{u}))] \quad (12.15)$$

其中以一个初始的估计值 $I_0(\mathbf{x})$ 作为迭代的开始。取 $I_0(\mathbf{x})$

=0，由(12.9)式我们得到 $I_i(x)=I(x,i)$。由此可知，只有选择(12.14)的解的一个好的初始估计，才可能节省(12.15)式的计算量。

$$I_0(x)=J(x,\ u^0(x))+I_0[g(x,u^0(x))] \quad (12.16)$$

得到 $I_0(x)$，再由解

$$\min_{u\in U}[J(x,\ u)+I_0(g(x,\ u))] \quad (12.17)$$

得到下一个近似 $u'(x)$。然后，我们用 $u'(x)$ 计算 $I_1(x)$，以这种方式继续迭代。当能够证明近似解序列 $I_i(x)$和 u(x)单调收敛时，这种解 (12.14)的近似方法是非常有用的。(如图 12-8 和 12-9 所示)。这时，近似方法的每一次迭代，都产生(12.14)的一个更好的解，当得到充分精确的解时，就停止迭代。下面，我们引进一个资源分配问题，并讨论解(12.14)的一个逐次逼近方法。

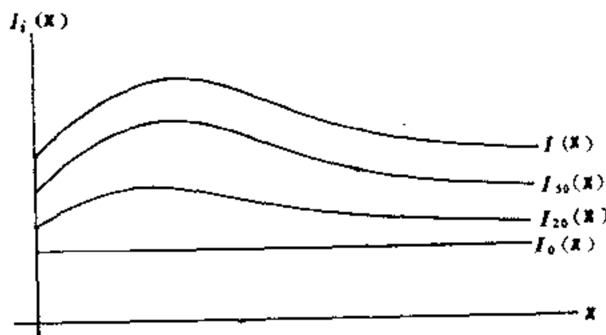


图 12-8

考虑一个具有 x 单位资本的投资者，他投资 u，$0\leqslant u\leqslant x$。在油井上得到利润 $g(u)$，以剩余资本 $x-u$ 购买不动产可得利润 $h(x-u)$，因此，从他的一段投资计划得到的总利润

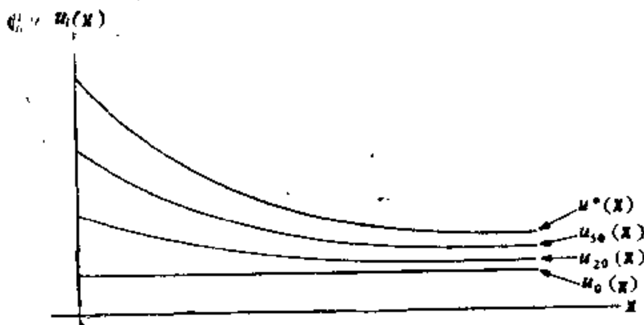


图 12-9

为 $g(u)+h(x-u)$。假定这样投资后，他最初的资本贬值为 $au+b(x-u)$，其中 $0\leqslant(a,\ b)<1$，这个资本可以再投资。资源分配问题就是要使投资者在 N 个阶段的利润为最大。

例 12-8 证明：对资源分配问题，用解(12.14)的逐次逼近法，可以产生 $I_i(x)$ 的单调收敛序列。

［**证**］ 对于资源分配问题，(12.14)式为

$$I(x)=\max_{0\leqslant u\leqslant x}[g(u)+h(x-u)+I(au+b(x-u))] \tag{12.18}$$

因为我们对(12.18)的解 $I(x)$ 的形式预先没有任何知识，所以作初始估计 $I_0(x)=0$，由(12.18)式得

$$I_1(x)=\max_{0\leqslant u\leqslant x}\ [g(u)+h(x-u)]$$

在任意实际资源分配问题中，可设利润函数 $g(x)$ 和 $h(x)$ 满足 $g(x)$，$h(x)\geqslant0$(对所有 $x\geqslant0$)及 $g(0)=h(0)=0$，则由上面 $I_1(x)$ 的方程可得 $I_1(x)\geqslant x_0(x)=0$。此外，若 $g(x)$ 和 $h(x)$ 是凸的，则 $g(u)+h(x-u)$ 也是凸的，因此 $I_1(x)$ 是凸

的。再用数学归纳法可得，$I_t(x)$都对 x 是凸的，并且 $I_t(x) \geqslant I_{t-1}(x)$。所以逐次逼近方法产生了一个单调非降凸解序列 $I_t(x)$。还可以证明，$I_t(x)$可以收敛到(12.18)的解，但详细论证很复杂，而且超出了本书的范围。

习题与题解

12-1 (最短路线问题)考虑一个道路网，点 1，2，…，N 表示城市。设 $d_{ij} \geqslant 0$ 表示从城市 i 到城市 j 的距离，f_i 表示从城市 i 到 N 的最短路线的长。假设每一对城市都有道路相通。求 f_i，$i=1$，…，$N-1$。

[解] 由城市 i 经过城市 j 又按最短路线到城市 N 的路程是 $d_{ij}+f_j$，因为 f_i 是从城市 i 到城市 N 的最短路程，所以 $f_i \leqslant d_{ij}+f_j$ 对所有($j \neq i$)成立。另一方面从城市 i 到城市 N 的最短路线必须通过某个城市 m，然后按某条路线到城市 N，该路线长度用 l_{mN} 表示，因此，$f_i=d_{im}+l_{mN}$。然而，因为 $l_{mN} \geqslant f_m$，所以对某些 $m=1$，…，N，$m \neq i$ 有 $f_i \geqslant d_{im}+f_m$成立。将这两个不等式结合，有 $f_i=d_{im}+f_m$。又因为 f_i 不能大于 $d_{ij}+f_j$，$j \neq i$，则有

$$f_i = \min_{j \neq i}(d_{ij}+f_j)$$

这是非线性代数方程，没有一般的求解方法。因此我们提出一个解这些方程组的逐次逼近法。这个方法将给出与(12.9)类似的递推方程。

设 $f_i^{(k)}$表示对 f_i的第 k 次近似、利用上面的方程组定义一个递推格式

$$f_i^{(k)}=\min_{j\neq i}(d_{ij}+f_j^{(k-1)}) \qquad (12.19)$$

其中最初设 $f_j^{(1)}=\infty$，$i\neq N$，$f_N^{(1)}=0$。这样，我们把原问题重新构造成了一个多段决策过程。其中第 k 次近似对应于第 k 段。决策变量在城市 1，……，N 的集合上取值，目标函数是由城市 i 到城市 N 的路线的长度。

12-2 证明由递推公式(12.19)给出的近似解收敛到f_i。

［证］ 虽然可以得到解析的证明，但我们给出一个第 k 次近似 $f_i^{(k)}$的实际解释，它直观地证明了在有限个阶段中 $f_i^{(k)}$收敛到 $f^{(i)}$。用归纳法证明 $f_i^{(k)}$是从城市 i 到城市 N 最多经过 $k-1$ 个城市的最短路线。

对 $k=2$ 这是显然成立的。因为从(12.19)得 $f_i^{(2)}=d_{iN}$。下面设 $f_i^{(k)}$是从城市 i 到城市 N 至多经过 $k-1$ 个城市的最短路程，考虑一条从城市 i 到城市 N 至多经过 $k-1$ 个城市的路线，这条路线从城市 i 到某个城市 j，并且从城市 j 到城市 N 至多经过 $k-1$ 个城市的最短路程是 $f_j^{(k)}$。那么，从城市 i 到城市 N 至多经过 k 个城市的最短路程由 $\min\limits_{j\neq i}(d_{ij}+f_j^{(k)})$给出，且由式(12.19)，$f_i^{(k+1)}=\min\limits_{j\neq 0}(d_{ij}+f_j^{(k)})$。因此 $f_i^{(k+1)}$是从城市 i 到城市 N 至多经过 k 个城市的最短路程。

因为总共有 N 个城市，从任意一个城市 i 到城市 N 的最短路程最多包含 $N-2$ 个城市。因此对某个 k，$1\leqslant k\leqslant N$，有 $f_i=f_i^{(k)}$，且由式(12.19)至多 N 次迭代可以求出f_i。

12-3 考虑图 12-10 给出的道路网，图中每条线表示连接两个城市的道路，线旁边的数字表示路程，求从城市 1，

2，3 到城市 4 的最短路程。

[解] 按(12.19)式的递推格式，我们设

$$f_1^{(1)}=f_2^{(1)}=f_3^{(1)}=\infty,\ f_4^{(1)}=0$$

则得

$$f_1^{(2)}=\min_{j\neq 1}(d_{1j}+f_j^{(1)})=\min(d_{12}+f_2^{(1)},\ d_{13}+f_3^{(1)},$$

$$d_{14}+f_4^{(1)})$$

$$=\min(4+\infty,\ 2+\infty,\ 4+0)=4$$

类似地可求出 $f_2^{(2)}=1$，$f_3^{(2)}=2$，$f_4^{(2)}=0$。$f_j^{(2)}$，$j=1\cdots4$，的这些值列在表 12-3 中的第 3 行。再一次用递推公式，可得 $f_1^{(4)}=4$，$f_2^{(4)}=1$，$f_3^{(4)}=2$，$f_4^{(4)}=0$。因为 f_j 必须是 $f_j^{(k)}$ $(1\leqslant k\leqslant N)$的最小值，所以有 $f_1=f_1^{(4)}=f_1^{(2)}=4$。$f_2=f_2^{(2)}=1$，$f_3=f_3^{(2)}=2$，$f_4=0$。由城市 1，2，3 到城市 4 的最短路程由图 12-11 给出，箭头指出了各对城市间旅行的方向。

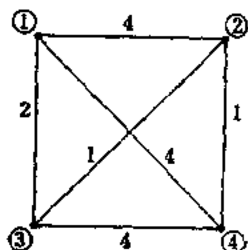


图 12-10

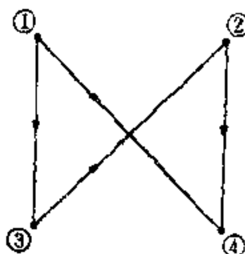


图 12-11

12-4 求推销员在图 12-10 表示的城市间的最短的回路周游的路线长度。

[解] 为了符号的一致，我们用城市 0 代替城市 4，并开始应用递推格式。先计算 $D(i/j)=d_{ij}+d_{j0}$、$0\leqslant(i,j)\leqslant3$，

表12-3

$f_1(k)$ k \ i	1	2	3	4
1	∞	∞	∞	0
2	4	1	4	0
3	4	1	2	0
4	4	1	2	0

$D(i|j)$的值由表 12-4 给出，由 $D(i|j)$的值可递推计算

$$D(i|j, j_2)=\min_{1\leq m\leq 2}[d_{ij_m}+D(j_m|j_{m-1}, j_{m+1})]$$

表12-4

$D(i/j)$ i \ j	0	1	2	3
0	0	8	2	8
1	4	4	5	6
2	1	8	1	5
3	4	6	2	4

例如

$$D(2|1, 3)=\min[d_{21}+D(1|3), d_{23}+D(3|1)]$$

$$=\min[4+6,\ 1+6]=7$$

$D(i|j_1,\ j_2)$的值由表 12-5 给出，最短回路周游的长度为 $D(0|1,\ 2,\ 3)$，用递推公式和表 12-5 上的 $D(i|j_1,\ j_2)$ 值得到

$$\begin{aligned}D(0|1,2,3)&=\min[d_{01}+D(1|2,\ 3),d_{02}+D(2|1,3),\\&\quad d_{03}+D(3|1,\ 2)]\\&=\min[4+4,\ 1+7,\ 4+7]=8\end{aligned}$$

最优的回路周游路线与图 12-11 所示的路线相同，但没有箭头，因为一个回路周游可以沿任何方向旅行。

表12-5

$D(i/j_1,j_2)$ (j_1,j_2) i	(1,2)	(1,3)	(2,3)
0	6	7	6
1	5	6	4
2	8	7	3
3	7	6	2

12-5 (可靠性问题)考虑由 N 个零件组成的具有最小重量的结构设计问题。第 i 个零件的截面积为 A_i，零件不损坏的概率为 $p_i(A_i)$，第 i 个零件的重量记为 $w_i(A_i)$，如果一个零件损坏，就认为整个结构损坏，并且损坏的事件认为是统计独立的。问题是要设计有最小重量的结构，同时不损坏的概率又有一个下界，试导出这一问题的泛函方程(12.9)。

［解］ 结构的总重为$\sum_{i=0}^{N-1} w_i(A_i)$，结构不损坏的概率为$\prod_{i=0}^{N-1} p_i(A_i)$。设不损坏的概率下界是 p，我们定义

$$P_{N-j}=\prod_{i=j}^{N-1} p_i(A_i),\quad I(p,\ N-j)=\min\sum_{i=j}^{N-1} w_i(A_i)$$

且 $P_{N-j}\geqslant p$。对 $j=N-1$，显然 $I(p,\ 1)=w_{N-1}(A_{N-1})$，其中 A_{N-1} 满足 $p_{N-1}(A_{N-1})=p$。

现设 $j=N-2$，第 $N-2$ 个零件有截面积 A_{N-2}，不损坏的概率为 $p_{N-2}(A_{N-2})$，则第 $N-1$ 个零件不损坏的概率为 $p_{N-1}=p/p_{N-2}(A_{N-2})$，第 $N-1$ 个零件的最小重量为 $I(p_{N-1},\ 1)$则

$$I(p,\ 2)=\min_{A_{N-2}}[w_{N-2}(A_{N-2})+I(p_{N-1},\ 1)]$$

对一般情况

$$I(p,\ N-j)=\min[w_j(A_j)+I(p_{j+1},\ N-j-1)]$$

12-6 考虑图 12-12 所示的由两个零件组成的结构，我们设每个零件损坏的概率是横截面积的函数，由 $q(A)=1-p(A)$给出，其中

$$p(A)=\begin{cases}\dfrac{2}{A_e}\left(1-\dfrac{A}{A_e}\right) & 0\leqslant A\leqslant A_e\\ 0 & A\geqslant A_e\end{cases}$$

如图 12-13 所示。每个零件的重量是 $w(A)=wA$，w是一个常数。试找出最小重量的结构，且损坏的概率小于 $1-p$。

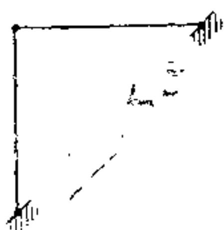


图 12-12

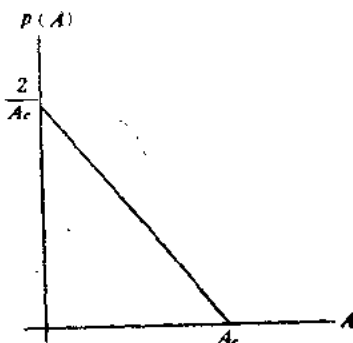


图 12-13

［解］ 由问题 12-5 我们得到 $I(p,1)=w_1(A_1)=wA^*$，其中 $p_1(A_1^*)=p(A_1^*)=p$，解方程 $p(A_1)=p$，得到 $A_1^*=A_c-pA_c^2/2$，且 $I(p,\ 1)=w[A_c-pA_c^2/2]$。其次我们用

$$I(p,\ 2)=\min_{A_0}[wA_0+I(p_1,\ 1)]$$

其中

$$p_1=\frac{p}{p(A_0)}=\frac{pA_c}{2(1-A_0/A_c)}$$

直接计算得到

$$I(p_1,\ 1)=w\left[A_c-\frac{p_1A_c^2}{2}\right]=w\left[A_c-\frac{pA_c^3}{4(1-A_0/A_c)}\right]$$

将这个表达式代入上述的泛函方程，我们得到

$$A_0^*=A_c-\sqrt{p}A_c^2/2,\quad I(p,\ 2)=w[2A_c-\sqrt{p}A_c^2]$$

12-7 重新考虑问题 12-5，求 $P_N=\prod_0^{N-1}p_i(A_i)$ 的最大，在结构的重量和成本上有约束条件。将此问题作为多段决策

过程并求泛函方程(12.9)。

［解］ 假设结构的总重量为 w，对这个结构可利用的总资本为 C，用 $c_i(A_i)$ 表示第 i 个零件的成本，可得下列对重量和成本的约束条件

$$W_{i+1}=W_i-w_i(A_i)$$
$$C_{i+1}=C_i-c_i(A_i)$$

其中 $A_i\geqslant 0$，$W_0=W$，$C_0=C$，$0\leqslant w_i(A_i)\leqslant W_i\leqslant W$，$0\leqslant c_i(A_i)\leqslant C_i\leqslant C$，如果 $I(W,C,N)=\max\prod_{i=0}^{N-1}p_i(A_i)$，则泛函方程(12.9)成为

$$I(W_j,\ C_j,\ N-j)=\max_{A_j}[p_j(A_j)I(W_{j+1},\ C_{j+1},\ N-j-1)]$$

12-8 (瓶颈问题)考虑一个 N 段制造过程，在第 i 段可用的原材料为 x^i。而 x^i 的一部分用 y^i 表示，用来继续生产原材料本身。x^i 的另一部分，用 z^i 表示，用来增加原材料 c_i 的生产能力。问题是对 $\sum_{i=0}^{N-1}(x^i-y^i-z^i)$ 给定的制造过程，使可利用原材料的总量为最大。

［解］ 设 x^i，c^i 的增长用下列方程表示

$$x^{i+1}=(1+\alpha)y^i$$
$$c^{i+1}=c^i+\beta z^i$$

其中 α，$\beta>0$，首先考虑这个过程的最后一段。我们看出，因为这是最后一段，没有 x^i 和 c^i 的下一个值，所以把所有可利用的原材料用于制造过程。因此

$$I(x^{N-1},\ C^{N-1},\ 1)=x^{N-1}$$

其中$I(x^j, C^j, N-j)$表示可用于$N-j$段制造过程的原材料的最大值。其次，该制造过程进入到倒数第二段，我们由(12.9)式得到

$$I(x^{N-2}, C^{N-2}, 2)=\max(x^{N-2}-y^{N-2}-z^{N-2}+x^{N-1})$$

其中$x^{N-1}=(1+\alpha)y^{N-2}$，所以

$$I(x^{N-2}, c^{N-2}, 2)=\max(x^{N-2}+\alpha y^{N-2}-z^{N-2})$$

因为y^{N-2}，$z^{N-2}\geqslant 0$，则最优策略是$z^{N-2}=0$，并且y^{N-2}应该取它最大可能的值。现在$y^{N-2}\leqslant x^{N-2}$，$y^{N-2}\leqslant c^{N-2}$，所以若$x^{N-2}\leqslant c^{N-2}$，则有$y^{N-2}=x^{N-2}$，且

$$I(x^{N-2}, c^{N-2}, 2)=x^{N-2}+\alpha x^{N-2}$$

否则，当$C^{N-2}\leqslant x^{N-2}$，则

$$y^{N-2}=c^{N-2}，且 I(x^{N-2}, c^{N-2}, 2)=x^{N-2}+\alpha c^{N-2}$$

泛函方程可以写作

$$I(x^{N-2}, c^{N-2}, 2)=x^{N-2}+\alpha\min(x^{N-2}, c^{N-2})$$

继续这个迭代过程，直到取得所有最优策略和最优利润$I(x^0, c^0, N)$。

12-9 (害虫控制)我们考虑害虫控制问题。X，Y表示两类昆虫，假设昆虫X捕食昆虫Y，一种杀虫剂可用来消灭X，但对Y无效。设x^i和y^i分别表示X和Y在第i个瞬时的数量，问题是求在$[0, N-1]$时间内的最优杀虫剂量，以使ax^N+by^N取极小值。这里a、$b>0$，N是一个任意常数。

[解] 设u^i表示在第i个瞬时杀虫剂的用量，我们可以写出描述X、Y数量的动态方程：

$$x^{i+1}=x^i+\alpha(u^i)x^i$$
$$y^{i+1}=(1+\gamma)y^i-\beta(u^i)x^i$$

其中$\gamma\geqslant 0$，函数$\alpha(u^i)$和$\beta(u^i)$分别表示杀虫剂的效率和X

的捕食特性，从实际考虑，可认为$\beta(u^i)$是u^i的减函数，对很大的u^i值，$\alpha(u^i)<0$，为明确起见，我们设$\alpha(u^i)=-\alpha(u^i)^2$，$\beta(u^i)=e^{-\beta u^i}$，对$i=N-1$。我们用数量的动态方程可得到

$$ax^N+by^N=ax^{N-1}-[be^{-\beta u^{N-1}}+a\alpha(u^{N-1})^2]x^{N-1}+b(1+\gamma)y^{N-1}$$

因为

$$\frac{d^2(ax^N+by^N)}{d(u^{N-1})^2}=b\beta^2e^{\beta u^{N-1}}+2a\alpha>0$$

设$d(ax^N+by^N)/du^{N-1}=0$，可得u^{N-1}的最优值，从而导出了方程

$$2a\alpha u^{N-1}-b\beta e^{-\beta u^{N-1}}$$

该方程可用图解求出(如图12-14所示)。得到$(u^{N-1})^*$，求出了$(u^{N-1})^*$，即可计算ax^N+by^N的最小值，再用泛函数方程

$$I(x^j, y^j, N-j)=\min_{u^j\geq 0} I(x^{j+1}, y^{j+1}, N-j-1)$$

可递推地算出u^j的最优值，$j=0, \cdots, N-1$。

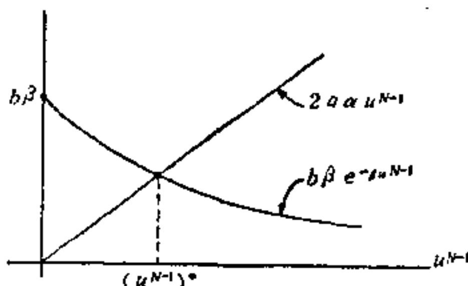


图 12-14

12-10 (经济增长)考虑一个用控制政府的消费来稳定国家经济增长问题的简化描述。设N表示相继两次国家

选举之间的年数，稳定国家经济的问题可以叙述作要使 N 年中政府最低的收入为最大。对这个问题确定其泛函方程(12.9)。

［解］ 为将这个问题化为多段决策过程，设 x^i，c^i 和 y^i 分别表示第 i 年末的国家收入、消费和个人投资，u^i 表示在第 $(i+1)$ 年中的政府消费。则有

$$x^i=c^i+y^i+u^{i+1}，\ c^i=\alpha(u^{i-1})x^{i-1}$$

这里 $\alpha(u^{i-1})$ 称为消费的边缘习性，并假设它是可以受政府影响的，假设个人投资依赖于相继两年消费的净差，所以

$$y^i=\beta(u^{i-1})(c^i-c^{i-1})$$

由上述方程得到

$$x^i=[1+\beta(u^{i-1})]\alpha(u^{i-1})x^{i-1}-\alpha(u^{i-2})x^{i-2}+u^{i-1}$$

如果假设 $\alpha(u^{i-1})$ 和 $\beta(u^{i-1})$ 与政府消费无关，则可简化为

$$x^i=(1+\beta)\alpha x^{i-1}-\alpha\beta x^{i-2}+u^{i-1}$$

该经济系统的状态变量在第 i 年的开始是 x^{i-1} 和 x^{i-2}。引进新变量 $z^{i-1}=x^{i-1}-x^{i-2}$，则国家收入的方程可写作

$$x^i=\alpha x^{i-1}+\alpha\beta z^{i-1}+u^{i-1}$$
$$z^i=(\alpha-1)^{i-1}+\alpha\beta z^{i-1}+u^{i-1}$$

其中新的状态变量是 x^{i-1} 和 z^{i-1}。

从实际考虑，我们设整个政府消费有个上限，用 U 表示，引入约束 $\sum\limits_{i=0}^{N-1}u^i\leqslant U$，如果设 $U_i=U-\sum\limits_{j=0}^{i-1}u^j$，则 $U_{i+1}=U_i-u^i$，并且政府消费的年约束成为 $0\leqslant u^i\leqslant U_i\leqslant U$。令

$$J(x^j,\ N-j,\ u^j,\ \cdots,\ u^{N-1})=\min(x^{j+1},\ \cdots,\ x^N)$$
$$I(x^j,\ N-j)=\max_{\substack{0\leqslant u^i\leqslant U\\ i=j,\cdots,N-1}}J\ (x^j,N-j,\ u^j\cdots,u^{N-1})$$

由(12.9)式我们得到

$$I(x^j,\ N-j)=\max_{0\leq u^j\leq U_j}\ \min[x^{j+1}, I(x^{j+1},\ N-j-1)]$$

从 $j=N-1$ 开始，并由上面的泛函方程作迭代，可得最优的政府年度消费。

12-11 在问题 12-10 中，求二年中政府的最优年度消费。取$\alpha=\beta=\dfrac{1}{2}$，$U=1$。

［**解**］ 首先考虑求第二年政府的最优消费，则

$$x^2=\frac{1}{2}x^1+\frac{1}{4}z^1+u^1$$

$$J(x^1,\ 1,\ u^1)=\min x^2=\frac{1}{2}x^1+\frac{1}{4}z^1+u^1$$

$$I(x^1,\ 1)=\max_{0\leq u^1\leq U_1}\left(\frac{1}{2}x^1+\frac{1}{4}z^1+u^1\right)$$

而 $J(x^1,\ 1,\ u^1)$对 u^1 是线性的，因此$(u^1)^*=U_1=1-u^0$使 J 取最大。其中 U_1 是在第二年开始时，由政府消费剩余的资本量。将$(u^1)^*$直接代入 $J(x^1,\ 1,\ u^1)$，得到$I(x^1,\ 1)=\dfrac{1}{2}x^1+\dfrac{1}{4}z^1+(1-u^0)$。

下面考虑求两年期间政府最优消费的问题。这时有

$$x^1=\frac{1}{2}x^0+\frac{1}{4}z^0+u^0$$

利用问题 12-10中得到的 $I(x^j,\ N-j)$的泛函方程，则得

$$I(x^0, 2)=\max_{0\leq u^0\leq 1}\{\min[x^1, I(x^1, 1)]\}$$

$$=\max_{0\leq u^0\leq 1}\left\{\min\left[\frac{1}{2}x^0+\frac{1}{4}z^0+u^0, \frac{1}{2}x^1+\frac{1}{4}z^1+(1-u^0)\right]\right\}$$

$$=\max_{0\leq u^0\leq 1}\left\{\min\left[\frac{1}{2}x^0+\frac{1}{4}z^0+u^0, \frac{3}{5}x^0+\frac{3}{16}z^0+1-\frac{1}{4}u^0\right]\right\}$$

设 $A=\frac{1}{2}x^0+\frac{1}{4}z^0$，$B=\frac{3}{5}x^0+\frac{3}{16}z^0+1$，则

$$I(x^0, 2)=\max_{0\leq u^0\leq 1}\left[\min\left(A+u^0, B-\frac{1}{4}u^0\right)\right]$$

图12-15给出了当 $B>A$ 时，$A+u^0$ 和 $B-\frac{1}{4}u^0$ 作为 u^0 的函数的图形。函数 $\min(A+u^0, B-\frac{1}{4}u^0)$ 也在图中用粗线画出，由图可以看出，这个函数在区间[0，1]内达到极大值，由方程 $A+u^0=B-\frac{1}{4}u^0$ 得到 u^0 相应的最优值，即 $(u^0)^*=\frac{4}{5}(B-A)$。当 $B\leqslant A$ 时，读者可以用类似的图形验证 $(u^0)^*=0$，在两种情况下，u^1 的最优值由约束方程 $(u^1)^*=1-(u^0)^*$ 算出。

12-12 考虑多段决策过程。其状态方程为

$$x^{t+1}=x^t-u^t$$

目标函数为

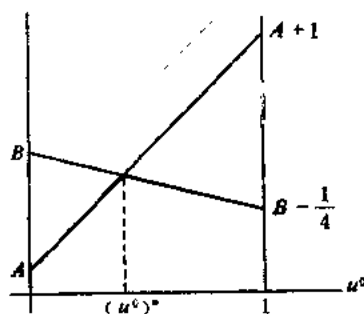


图 12-15

$$J(x^0,\ N,\ u^0,\ \cdots,\ u^{N-1})=\sum_{i=0}^{N-1}[(u^i)^2+(x^i-u^i)^2]$$

求最优决策序列。

［解］ 考虑仅剩一个阶段时的决策过程，可得

$$J(x^{N-1},\ 1,\ u^{N-1})=(u^{N-1})^2+(x^{N-1}-u^{N-1})^2$$

因为

$$\frac{d^2J(x^{N-1},\ 1,\ u^{N-1})}{d(u^{N-1})^2}=4>0$$

所以 $J(x^{N-1},\ 1,u^{N-1})$是 u^{N-1}的函数。令 $dJ(x^{N-1},1,u^{N-1})/du^{N-1}=0$，可得最优值 $(u^{N-1})^*=\frac{1}{2}x^{N-1}$，$I(x^{N-1},1)=J(x^{N-1},\ 1,\ (u^{N-1})^*)=\frac{1}{2}(x^{N-1})^2$。

其次，考虑剩余两个阶段时的决策过程。由(12.9)式得

$$I(x^{N-2},\ 2)=\min_{u^{N-2}}[(u^{N-2})^2+(x^{N-2}-u^{N-2})^2+I(x^{N-1},\ 1)]$$

$$= \min_{u^{N-2}}\Big[(u^{N-2})^2+(x^{N-2}-u^{N-2})^2 + \frac{1}{2}(x^{N-1})^2\Big]$$

由状态方程，$x^{N-1}=x^{N-2}-u^{N-2}$。用上面所示的微积分计算进行极小化过程，得到$(u^{N-2})^*=\frac{3}{5}x^{N-2}$、$I(x^{N-2},2)=\frac{3}{5}\times(x^{N-2})^2$。下面用归纳法证明$I(x,N)$是$x$的二次型，且极小$u^*$对$x$是线性的。假设$I(x^{j+1},N-j-1)=K(x^{j+1})^2$，由式(12.9)可得

$$I(x^j,N-j)=\min_{u^j}\left[(u^j)^2+(x^j-u^j)^2+I(x^{j+1},N-j-1)\right]$$
$$=\min_{u^j}\left[(u^j)^2+(x^j-u^j)^2+k(x^{j+1})^2\right]$$

由状态方程，$x^{j+1}=x^j-u^j$，完成极小化过程，得到

$$(u^j)^*=\frac{(1+k)}{2+x}x^j,\quad I(x^j,N-j)=\frac{(1+k)(x^j)^2}{2+K}$$

从而由归纳法证明了所要求的结果。如果我们记K_{N-j-1}为常数K在第$N-j-1$段的值，则由上述结果可得

$$K_{N-j}=\frac{1+K_{N-j-1}}{2+K_{N-j-1}}$$

而$K_1=\frac{1}{2}$，$(u^j)^*=K_{N-j}x^j$，$I(x^j,N-j)=K_{N-j}(x^j)^2$，这样使用$K_{N-j}$的递推方程，不用在每段作极小化计算就能求得$(u^j)^*$和$I(x^j,N-j)$。

12-13 求 12-12 中讨论的多段决策过程的无穷段逼近的解。

［**解**］ 由(12.14)得

$$I(x)=\min[u^2+(x-u)^2+I(x-u)]$$

为解上述泛函方程，取 $I^0(x-u)=K(x-u)^2$，并定义

$$I^1(x)=\min_u[u^2+(x-u)^2+I^0(x-u)]$$

$$=\min_u[u^2+(K+1)(x-u)^2]$$

进行极小化运算，可得 $u^*=(1+K)x/(2+K)$，$I'(x)=(1+K)x^2/(2+K)$。注意如果 $I^0(x)=I'(x)$，这个逼近过程将立即结束。这要求

$$\frac{1+K}{2+K}=K$$

解这个方程得 $K=0.62$，所以 $u^*=0.62x$，$I(x)=0.62x^2$。

12-14 (曲线拟合)设 $g(x)$表示在区间$[a、b]$上实变量 x 的实值函数，曲线拟合的问题就是用$[a、b]$上的一系列直线作近似。若我们只允许用两条直线，试用多段决策过程建立并解此问题。

［**解**］ 首先考虑由$[a、b]$上一条直线逼近 $g(x)$的问题，设直线方程为 $mx+c$，则最佳逼近由对 m，c 极小化

$$I_0(a,b,m,c)=\int_a^b[g(x)-mx-c]^2dx$$

得到。因为积分对 m 及 c 连续，这个极小化过程可借助于微积分得到，设

$$M_0=\int_a^b g(x)dx\ ,\quad M_1=\int_a^b xg(x)dx,$$

$$I_1=(b-a),\quad I_2=\frac{1}{2}(b^2-a^2),\ I_3=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$$

m 和 c 的最优值必须满足方程

$$mI_3+cI_2=M_1$$
$$mI_2+cI_1=M_0$$

由此得到

$$m^*=\frac{M_1I_1-M_0I_2}{I_3I_1-I_2^2}=x_1(a,\ b) \qquad (12.22)$$

$$c^*=\frac{M_0I_3-M_1I_1}{I_3I_1-I_2^2}=x_2(a,\ b) \qquad (12.23)$$



图 12-16

我们引进函数 $x_1(a,b)$和 $x_2(a,b)$、以提醒读者 m^* 和 c^* 是 a，b 的函数。

其次考虑用两条直线逼近 $g(x)$的问题。将$[a,\ b]$分为两个子区间$[a,\ x_{N-1}]$及$[x_{N-1},b]$，如图 12-16 所示。$[a,\ x_{N-1}]$上的直线方程为 $m_{N-1}x+c_{N-1}$，$[x_{N-1},\ b]$上的直线方程为m_Nx+c_N，最佳逼近通过极小化得到，即

$$J_1(a,b,\ x_{N-1},\ m_{N-1},\ c_{N-1})=\int_a^{x_{N-1}}[g(x)-m_{N-1}x$$

$$-c_{N-1}]^2dx+\int_{x_{N-1}}^b[g(x)-m_Nx-c_N]^2dx$$

令 $I_0(a, b)=I_0(a, b, m^*, c^*)$ 及 $I_1(a, b)=\min J_1(a, b, x_{N-1}, c_{N-1})$，并且应用(12.9)式，得到

$$I_1(a, b)=\min_{m_{N-1}, c_{N-1}, x_{N-1}}\left\{\int_a^{x_{N-1}}[g(x)-m_{N-1}x - c_{N-1}]^2 dx+I_0(x_{N-1}, b)\right\}$$

注意，对每个 x_{N-1} 的值，m_{N-1} 和 c_{N-1} 的最优值是 $m^*_{N-1}=x_1(a, x_{N-1})$，$c^*_{N-1}=x_2(a, x_{N-1})$。将 m_{N-1} 和 c_{N-1} 的这些表达式代入到 $J_1(a, b, x_{N-1}, m_{N-1}, c_{N-1})$ 中，得到函数 $\hat{J}_1(a, b, x_{N-1})$。它只与 x_{N-1} 有关。对 x_{N-1} 求 $\hat{J}_1(a,b, x_{N-1})$ 的极小，得最优值 x^*_{N-1} 以及 m_{N-1}，c_{N-1}，m_N 和 c_N 的相应的最优值。

12-15 求由 $[a, b]$ 上的两个常数值函数对 $g(x)=x$ 的最佳逼近。

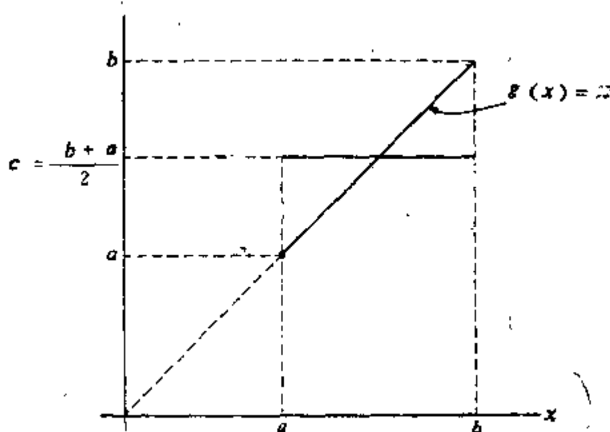


图 12-17

［解］ 定义 $J_0(a, b, c_0)=\int_a^b (x-c_0)^2 dx$ 和 $I_0(a,b)=\min\limits_{c_0} J(a, b, c_0)$。用微积分得到 $I_0(a, b)=\frac{1}{3}(b-a)^3$，$c_0$ 的最优值是 $c_0^*=\frac{1}{2}(b+a)$这个极小化问题的解如图 12-17所示。

其次，我们考虑用两个常数函数逼近 $g(x)=x$ 的问题。将区间[0，1]分为二个子区间[0，u]，[u，1]，如图 12-18所示。最佳逼近由使用问题 12-14 的递推公式得到。即

$$I_1(0, 1)=\min_{(c_1, u)}\left[\int_0^u (x-c_1)^2 dx+I_0(u, 1)\right]$$

$$=\min_{(c_1, u)}\left[\frac{1}{3}(u-c_1)^3+\frac{1}{3}c_1^3+\frac{1}{3}(1-u)^3\right]$$

用微积分解这个极小化问题，得 $u^*=\frac{2}{3}$，$c_1^*=\frac{1}{3}$，且 u^* 是已知的，则得到 $c_0^*=\frac{1}{2}(b+u^*)=\frac{5}{6}$。最佳逼近如图 12-18所示。

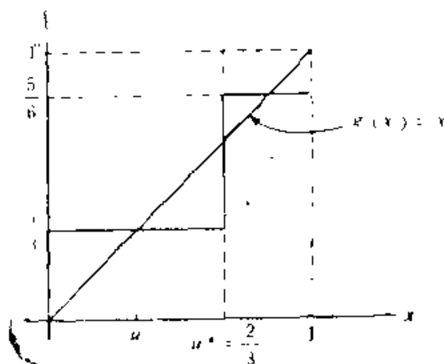


图 12-18

补充题

12-16 一项研究基金有 X 美元，分配给 N 个不同的研究补助金。设 x^i 和 $f_i(x^i)$ 分别表示分给第 i 个补助金的美元数和从第 i 个补助金得到的利润。将这个最优分配问题建立成一个多段决策过程。用无限段决策过程逼近，并求最优分配策略(提示：见例 12-4和例 12-5)。

12-17 设我们想把区间[0, 1]分为两个子区间，并且在子区间上用直线逼近 $g(x)$。当 $g(x)=x^2$时，将这个问题化为一个多段决策过程，并求其解(提示：见问题12-14)。

12-18 (采金)设有两个金矿 X 和 Y，分别含有 x 和y 吨黄金，用 P_x 表示采矿机械在 X 矿开采 r_x 吨黄金，$0\leqslant r_x\leqslant x$，并保持工作秩序的概率，则 $1-P_x$ 表示为在 X 矿采金前机械损坏的概率。对 Y 矿，$0\leqslant r_y\leqslant y$，$P_y$ 有与 P_x 相同的意义。假设机械在第一次使用后不损坏，它可以再一次在 X 或 Y 矿中使用。然而在三次使用后，机械要求保养，试求使用机械的最优策略。以使该机械的采金量最大。

12-19 考虑求函数 $f(x)=x_1x_2\cdots x_N$ 的极大值的问题。约束为 $x_i\geqslant 0$，$\sum_{i=1}^{N} x_i=a$，$a>0$，证明 $I(a, 1)=a$，并且

$$I(a, N)=\max_{0\leqslant x\leqslant a}[xI(a, x, N-1)]$$

12-20 关于 u^i，$i=0, \cdots, N-1$，求 $\sum_{i=0}^{N-1}[c(u^i)^2+d(x^i-u^i)^2]$的最小。其中 c，$d>0$，状态方程为 $x^{i+1}=ax^i+bu^i$(提示：见问题 12-12)。

12-21 求问题12-20中给出的多段决策问题的无穷段逼近，并解这个泛函方程(提示：见问题12-13)。

第十三章　大规模规划

在前十二章中，我们讨论了求解各种非线性规划问题的许多方法和标法，象在任何非线性理论中那样，每一种方法都仅仅对一类特定的问题才是有用的。除这种局限性外，每种方法当问题的维数增加时就不能应用，特别是当变量的数目增大时，数值算法的收敛性不能在合理的计算代价之内得到。确切说什么样的整数值相应于"大"，这高度依赖于问题的结构。一般地，最大的问题能够用线性规划来解决，其余依次是二次规划、整数规划、某些非线性规划的直接标法和动态规划。具有几千个变量的线性规划问题是要经常处理的，而多于两个状态的动态规划问题就似乎是解不出的。

为了推广这些方法解决更高维数的问题，需要修正方法和使用特别的技巧。现在这些方法已经作了广泛的研究并且已经构成了大规模数学规划领域的基础。在多数情况下，为了使所要解决的问题的维数增加，大规模数学规划采用了一类特别问题的结构。分解方法是将问题分解为一些能独立求解的更小的子问题。最后一步是将子问题的解加以组合后使它成为解原来最优化的问题。这一步称为主问题或二级问题。当这个方法成立时，减小问题的维数所花的代价，是在得到二级问题的收敛之前，必须多次地解每个子问题。有时，在非常大的问题中要精确地解出最优解是不实际的。这时，在得到完全的收敛性之前，终止高一级的算法以得到一个"好的"可行解，这也就满意了。

例13-1 为了说明分解的概念，我们考虑典型的工厂最优化问题。这个工厂由许多单个的单元加工过程所组成，每个单元过程本身都很复杂。而每个过程用的原料又是由其它的一些过程生产的，或者是从外面买来的。此外，每个过程生产的产品可以供另外的生产单元进一步加工或者向外出售。显然整个工厂的最优化，就是要使每一个单元过程优化，而且要优化各单元过程之间的相互作用或协调。

[**解**] 为了分解这个问题以求解几个独立的子问题，我们暂时搁置和忽略过程之间的相互作用，在独立地优化了每

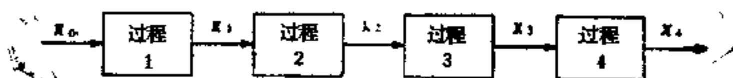


图 13-1

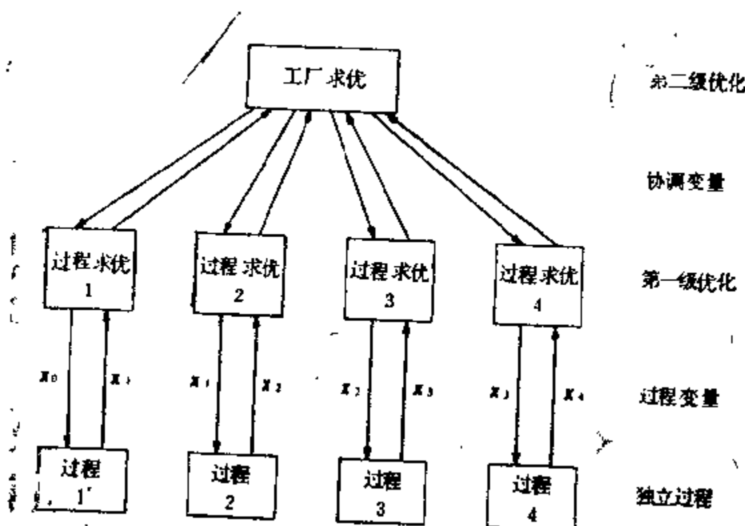


图 13-2

一个单元过程之后，再把这些解重新组合起来，使之成为混成一体的最优解。然而，因为我们开始时忽略了过程之间的相互作用，在第一次试图将这些单元过程的解组合时，可能是不可行的。因此则要求二级算法的几次迭代。

为了从图形上说明这个分解过程，图13-1表明了一个非常简单的生产流程，其中变量x_i表示由第i个过程生产的产品数量，图13-2说明对这个工厂的最优化过程，其中单元过程是独立优化的，然后再在高一级协调。

因为大规模规划的文献是很广泛的，在这里我们仅讨论几个最重要的课题。关于这一主题读者可参看[Wismer，1971]和[Lasdon，1970]两书。

一，Lagrange函数的分解

首先考虑如下形式的问题

$$\max \sum_{i=1}^{N} f_i(x_i)$$

且使 $g_i(x_1, x_2 \cdots x_N) \geqslant 0$，$i=1, 2, \cdots, N$

构选 Lagrange函数，得到

$$L(x, \mu)=\sum_{i=1}^{N} f_i(x_i)+\sum_{i=1}^{N} \mu_i^T g_i(x_1, x_2, \cdots, x_N)$$

或者

$$L(x, \mu)=\sum_{i=1}^{N} [f_i(x_i)+\mu_i^T g_i(x_1, x_2, \cdots, x_N)] \tag{13.1}$$

为了分解这个问题，我们把$L(x, \mu)$写成另一种形式，使得

上式括号中的项仅仅是第 i 个子系统的函数，为此，先定义一些辅助变量S_j使

$$S_j = x_j, \quad j=1, 2, 3, \cdots, N \tag{13.2}$$

如果将方程(13.2)也加到Lagrange函数上，以取代(13.1)式，有

$$L(x, \lambda, \mu, S) = \sum_{i=1}^{N} [f_i(x_i) + \mu_i^T g_i(x_i, S_1, S_2, \cdots, S_j \cdots, S_N)_{j \neq i} + \lambda_i^T (x_i - S_i)] \tag{13.3}$$

其中如果对所有 $j \neq i$, $g_j(x_1, \cdots, x_N)$ 不是x_i 的函数，则$\lambda_i = 0$。

现在可以按两种不同方式分解(13.3)式的 Lagrange 函数，第一种方法是把 S_i 看作固定参数，则对每个子问题的 Lagrange 函数可写为

$$L_i(x_i, \lambda_i, \mu_i, S_i) = f_i(x_i) + \mu_i^T g_i(x_i, S_1 S_2, \cdots S_j, \cdots S_N)_{j \neq i} + \lambda_i^T (x_i - S_i) \tag{13.4}$$

$$i=1, 2 \cdots N$$

这里我们把所有这些项进行了重新排列，使得只有不同第 i 个子系统相联结的变量才是固定变数S_i，现在每个 *Lagrange* 函数 $L_i(x_i, \lambda_i, \mu_i, S_i)$, $i=1, 2 \cdots, N$ 的驻点可以作为S_i 的函数而被独立确定，这一步称为一级最优化，可以用第四章讨论的必要条件来完成。

必须确定一种选择参数S_i的最优值的方法，这一步称为二级最优化，用已讨论过的简单方法来完成。这种Lagrange分解法称为**可行分解**，这是因为用方程(13.2)给出的互相约束总是满足的。这样一来，虽然在得到 S_i的最优值完全

收敛之前，终止了二级最优化问题，方程(13.4)的解也是可行的。

对方程(13.3)中的Lagrange函数的另一种分解方法是把λ_i看作固定参数。这时设

$$S_{ij}=x_j,\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ N(i\neq j) \tag{13.5}$$

其中S_{ij}表示在第i个子系统中有x_j出现。

代入到(13.1)中，并用Lagrange乘子λ_{ij}将(13.5)式加上去则得

$$L(x,\ \lambda,\ \mu,\ S)$$

$$=\sum_{i=1}^{N}[f_i(x_i)+\mu_i^T g_i(x_i,\ s_{i1},\ S_{i2},\ \cdots,\ S_{ij},\ \cdots,$$

$$S_{iN})_{i\neq j}+\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}^T(x_j-S_{ij})]$$

其中若$g_i(x_1,\ \cdots,\ x_N)$不是x_j的函数，则$\lambda_{ij}=0$

现在子系统的Lagrange函数为

$$L_i(x_i,\ \mu_i,\ S_{ij},\lambda_{ij})=f_i(x_i)+\mu_i^T g_i(x_i,$$

$$S_{i1},\ S_{i2},\ \cdots,\ S_{ij},\cdots,\ S_{iN})_{i\neq j}+\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ji}^T x_i$$

$$-\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}^T S_{ij} \tag{13.6}$$

在(13.6)式中对x_i、μ_i和S_{ij}的驻点，可以作为λ_{ij}的函数由Kuhn-Tucker确定，在一级最优化问题中确定这些值，在二级最优化中确定λ_{ij}。Lagrange函数的这种分解方法称为**对偶可行分解**，因为可以证明，从(13.6)式产生的二级问

题是从(13.4)产生的二级问题的对偶。

例13-2 用对偶可行分解确定下述大规模线性规划问题

$$\min \sum_{i=1}^{N} C_i^T x_i \qquad (13.7)$$

且使
$$\sum_{i=1}^{N} A_i x_i = b \qquad (13.8)$$

$$B_i x_i \geqslant b_i, \quad x_i \geqslant 0$$

[解] 有互联关系的等式是(13.7)和(13.8)，现在可以写出Lagrange函数

$$L(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{N} [C_i^T x_i + \lambda_i^T (A_i x_i - b)]$$

这样第 i 个子问题可写成

$$\min_{x_i} (C_i^T + \lambda_i^T A_i) x_i - \lambda_i^T b \qquad (13.9)$$

且使 $B_i x_i \geqslant b_i, \quad x_i \geqslant 0$

由二级最优化确定 λ_i 的最优值，在线性规划中二级问题称为**主规划**。对偶可行分解称为**目标调节**，这是因为互联约束(13.8)可以通过修正(13.9)给的子问题的目标来满足。

x_1	x_2			x_N	
c_1	c_2	···		c_N	
A_1	A_2	···		A_N	b
B_1	0	···		0	b_1
	B_2			0	b_2
	0				⋮
			B_{N-1}	0	b_{N-1}
				B_N	b_N

图 13-3

可用分解法求解的大多数线性规划问题，如图(13-3)所示的框图结构。

例13-3 对目标函数

$$\min f(x_1,x_2)=x_1^2-12x_1+\frac{1}{2}x_2^2-x_1x_2$$

若用可行分解法，写出求最小问题的两个独立的子问题。

［**解**］ 如果我们在目标函数的最后一项中用 $x_1=s$ 代入目标函数便可以分解，则 Lagrange 函数为

$$L(x_1,x_2,S,\lambda)=x_1^2-12x_1+\frac{1}{2}x_2^2-Sx_2+\lambda(x_1-s)$$

在上面的分解中，S 是作为已知参数处理的。于是子问题为

$$L_1(x_1,\ \lambda,\ S)=x_1^2-12x_1+\lambda(x_1-s)$$

$$L_2(x_2,S)=\frac{1}{2}x_2^2-Sx_2$$

最优解的必要条件为

$$\frac{\partial L_1}{\partial x_1}=2x_1-12+\lambda=0$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \lambda}=x_1-S=0$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial x_2}=x_2-S=0$$

因此对子问题 1 得

$$x_1^*(s)=s,\qquad \lambda^*(s)=12-2s$$

对子问题 2 得

$$x_2^*(s)=s$$

例13-4 对于例13-3画出表明所有的信息转移的两级结

构图

[解] .两级结构图如图13-4所示。

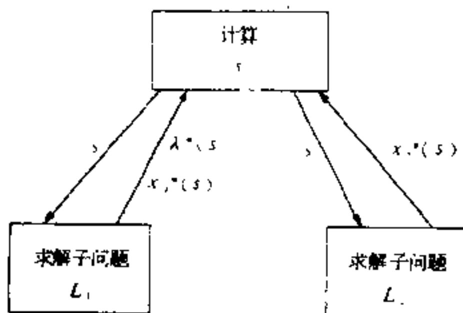


图 13-4

例13-5 对例13-3使用对偶可行法分解此问题。

[解] 在这种情况下λ作为已知参数,子问题的Lagrange函数为

$$L_1(x_1,\ \lambda)=x_1^2-12x_1+x_1$$

$$L_2(x_2,s,\lambda)=\frac{1}{2}x_2^2-sx_2-\lambda s$$

必要条件是

$$\frac{\partial L_1}{\partial x_1}=2x_1-12+\lambda=0$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial x_2}=x_2-s=0$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial s}=-x_2-\lambda=0$$

因此对子问题1有

$$x_1^*(\lambda)=6-\frac{1}{2}\lambda$$

对子问题 2 有

$$x_2^*(\lambda)=-\lambda,\ S^*(\lambda)=-\lambda$$

例13-6 对于例13-5画出表明所有信息转移的两级结构图。

[**解**] 两级结构图如图13-5所示。

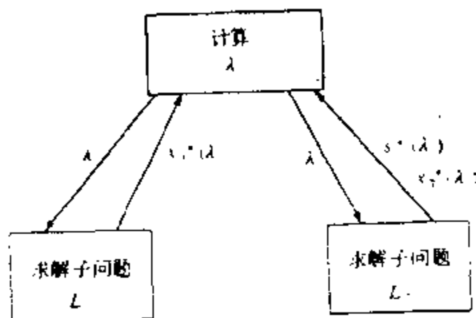


图 13-5

二、可行方法

对极大化问题

$$\max\sum_{i=1}^{N}f_i(x_i)$$

且使$g_i(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N)\geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,N$

与可行分解的子问题对应的 Lagrange 函数由(13.4)式给出对这个子问题的 Kuhn-Tucker 必要条件为

$$\frac{\partial L_i}{\partial x_i}=\frac{\partial f_i}{\partial x_i}+\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_i}\right)^T\mu_i+\lambda_i=0 \qquad (13.10a)$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial \mu_i}=g_i(x_i,\ S_1,\ S_2,\ \cdots,S_j\cdots,S_N)_{i\neq j}\geqslant 0$$

(13.10b)

$$\frac{\partial L_i}{\partial \lambda_i}=\mathbf{x}_i-\mathbf{S}_i=0 \tag{13.10c}$$

$$\boldsymbol{\mu}_i^T\mathbf{g}_i=0,\ \boldsymbol{\mu}_i\geqslant 0 \tag{13.10d}$$

这些必要条件由$\mathbf{x}_i$，$\boldsymbol{\lambda}_i$，$i=1，2，\cdots，N$解出，在第二级问题仍要满足的必要条件为

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{S}_i}=0$$

其中

$$L=\sum_{i=1}^{N}L_i$$

因此

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{S}_i}=\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial \mathbf{S}_i}\right)^T\boldsymbol{\mu}_j-\boldsymbol{\lambda}_i=0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N \tag{13.11}$$

利用梯度算法，这个条件可用来确定$\mathbf{S}_i$，如果我们将方程(13.11)写为

$$dL=\left[\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial \mathbf{S}_i}\right)^T\boldsymbol{\mu}_j-\boldsymbol{\lambda}_i\right]^T d\mathbf{S}_i$$

则可选取

$$d\mathbf{S}_i=k\left[\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial \mathbf{S}_i}\right)^T\mu_j-\boldsymbol{\lambda}_i\right]$$

其中$k>0$以保证$L>0$，这对L的极大化是必要的。于是离散形式的二级梯度算法成为

$$S_i^{p+1}=S_i^p+k\left[\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial \mathbf{S}_i}\right)^T\boldsymbol{\mu}_j-\boldsymbol{\lambda}_i\right] \tag{13.12}$$

其中 $k>0$ 。若这个算法收敛，则 $S_i^{p+1}\approx S_i^p$，且(13.11)式成立。这个两级迭代过程的收敛性所要求的条件是子问题的可行解存在。

例13-7 确定例13-3的第二级必要条件和梯度算法。

［解］ 第二级必要条件为

$$\frac{\partial L}{\partial S}=-x_2-\lambda=0$$

或者

$$x_2^*=-\lambda^*$$

于是由例13-3得

$$S=2S-12,\ 或 S^*=12$$

以及

$$x^*=x_2=12 \qquad \lambda^*=-12$$

梯度算法为

$$s^{p+1}=s^p+k(-x_2-\lambda)^p$$

或

$$s^{p+1}=s^p+k(s-12)^p \qquad k<0$$

因此

$$s^{p+1}=(1-k)s^p+12k \qquad k<0$$

收敛到 $s^*=12$。这是因为对于 $0<k<1$ 和 $s^p=0$，有 $s^{p+1}<12$ 和 $1-k>0$；而对 $k>1$ 和 $s^p=0$，有 $s^{p+1}>12$ 和 $1-k<0$。

三、对偶可行法

对于对偶可行法，问题的Lagrange函数由(13.6)式给出，这些子问题的 kuhn-Tucker 必要条件是

$$\frac{\partial L_i}{\partial \mathbf{x}_i}=\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}_i}+\left(\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \mathbf{x}_i}\right)^T \boldsymbol{\mu}_i+\sum_{j=1}\lambda_{ji}=0 \tag{13.13a}$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial \boldsymbol{\mu}_i}=\mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i,\ \mathbf{S}_{i1},\ \cdots,\ \mathbf{S}_{ij},\ \cdots,\ \mathbf{S}_{iN})_{i\neq j}>0 \tag{13.13b}$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial \mathbf{S}_{ij}}=\left(\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \mathbf{S}_{ij}}\right)^T \boldsymbol{\mu}_i-\lambda_{ij}=0,\ j=1,\ 2,\ \cdots N \tag{13.13c}$$

$$\boldsymbol{\mu}_i^T\mathbf{g}_i=0,\qquad \boldsymbol{\mu}_i\geqslant 0 \tag{13.13d}$$

这些必要条件对$\mathbf{x}_i$、$\boldsymbol{\mu}_i$ 和 $\mathbf{S}_{ij}$ 作为 λ_{ij} 的函数解出在第二级问题仍要满足的必要条件是

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_{ij}}=0$$

其中

$$L=\sum_{i=1}^{N}L_i$$

因此

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_{ij}}=\mathbf{x}_j-\mathbf{S}_{ij}=0,\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ N \tag{13.14}$$

在这种情况下可以用以前讲的梯度算法解出λ_{ij}

$$d\lambda_{ij}=k(\mathbf{x}_j-\mathbf{S}_{ij}) \tag{13.15}$$

或

$$\lambda_{ij}^{p+1}=\lambda_{ij}^{p}+k(\mathbf{x}_j-\mathbf{S}_{ij})^{p}$$

其中 $k<0$ 。因为二级问题是一级问题的对偶，而因为一级问题是求极大化，所以二级问题是要求极小化。这种对偶性

将在问题13-1中证明。两级迭代过程的收敛条件要求方程组(13.13)有解存在，且这解是子问题的极大。(13.13)的解是子问题的极小或鞍点，不能保证收敛性。

例13-8 对例13-5确定第二级必要条件和梯度算法。

［**解**］ 对于对偶可行分解，第二级必要条件为

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=x_1-S=0$$

由例13-5得：

$$x_1^*(\lambda)=6-\frac{\lambda}{2},\ S^*(\lambda)=-\lambda$$

$$6-\frac{1}{2}\lambda=-\lambda$$

因此 $\lambda^*=-12$且$x_1^*=x_2^*=S^*=12$

梯度算法是

$$\lambda^{p+1}=\lambda^p+k(x_1-S)^p,\ k<0$$

或

$$\lambda^{p+1}=\lambda^p+k\left(6+\frac{\lambda}{2}\right)^p=\left(1+\frac{k}{2}\right)\lambda^p+6k,\ k<0$$

这样，若 $\lambda^p=0$ 则 $\lambda^{p+1}=6k>0$，梯度算法从最优解 $\lambda^*=-12$ 处离开。在例13-9中我们再考察其原因。

例13-9 说明例13-8中为什么第二级算法不收敛。

［**解**］ 收敛条件要求 $L_1(x_1,\lambda)$ 和 $L_2(x_2,S,\lambda)$两者，对给定的λ值，关于 x_1x_2 和 S 有局部极小，由例13-8

$$\frac{\partial L_1}{\partial x_1}=2x_1-12+\lambda$$

所以

$$\frac{\partial^2 L_1}{\partial x_1^2}=2>0$$

这意味着L_1对x_1有极小，对L_2有

$$\frac{\partial L_2}{\partial x_2}=x_2-S$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial S}=-x_2-\lambda$$

所以

$$\frac{\partial^2 L_2}{\partial x_2^2}=1 \qquad \frac{\partial^2 L_2}{\partial S^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial S}=\frac{\partial^2 L_2}{\partial S \partial x_2}=-1$$

因此L_2的Hesse矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

主子式是1和-1，所以L_2在$x_2^*(\lambda)$，$S^*(\lambda)$有鞍点(见第二章)。L_2没有关于x_2和S的局部极小，所以收敛条件不满足。这就说明了例13-8中二级梯度算法的性能。

四、经济学解释

由方程(13.6)给出的Lagrange函数的对偶可行分解有一个有趣的经济学解释，它是由一级和二级问题的对偶特性产生。

考虑一个完全竞争的经济的特性，设第i个子系统表示一个特别的经济区域。假设

$f_i(x_i)$是由生产成品x_i包括(负的)生产成本所赚得的纯收入，见问题13-4。

$P_i=\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}$ 是每单位 x_i 的售价。

λ_{ij} 是从第 j 个经济区域买原料 S_{ij} 的单价。

则

$$L_i=f_i+P_i^T x_i-\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}^T S_{ij}$$

表示第 i 个区域按当时价格 P_i、λ_{ij} 同外界所有交易中得到的纯收入。如果有资源约束存在，那么不失一般性，方程(13.6)中可包括下面一项

$$(\mu_i)^T g_i(x_i,\ S_{i1},\ \cdots,\ S_{ij},\cdots,S_{iN})_{i\neq j}=0$$

现在考虑第 i 个区域管理人员的工作，这就是按给定的价格 λ_{ij}、P_i 选择生产水平 x_i 以使收入 L_i 最大。假设价格由中心机构制定，这个机构的任务是调整价格使供求相等，这样若

$$E_i(\lambda_{ij})=S_{ij}-x_i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ N \qquad (13.16)$$

表示商品 x_i 超过需求量，则中心机构就要调整价格使需求量 S_{ji} 等于供应量 x_i，此时 $E_i(\lambda_{ij})=0$，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ N$，价格停止波动。因为在方程(13.15)中

$$d\lambda_{ij}=kE(\lambda_{ij}),\ k>0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ N$$

当 $E_i(\lambda_{ij})=0$，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ N$ 时，价格不波动，二级算法已收敛。另一方面，当求过于供时，则 $E_i>0$，价格上升。类似地，当供过于求，则 $E_i<0$，价格下降。

确切地说，这种经济的模拟，要求写出互联约束为

$$x_i = \sum_{j=1}^{N} S_{ij}$$

而不是 $x_i = S_{ij}$，$j=1, 2, \cdots, N$。这样一来方程(13.16)中

$$E_i = (\lambda_i) = \sum_{j=1}^{N} S_{ij} - x_i$$

并且上面的讨论不变。

习题与题解

13-1 对问题

$$\min f(\mathbf{x})$$

$$\text{且使 } g_i(\mathbf{x})=0, \ i=1, 2, \cdots, N$$

应用对偶可行法，并证明一级和二级问题是对偶的。这时 $g_i(\mathbf{x})=0$，$i=1, 2, \cdots, N$ 表示子问题间的互联约束。

［**证**］ 假如在$\mathbf{x}^*$存在有限局部极小，即

$$\min f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*) \qquad (13.17)$$

$$g(\mathbf{x}^*)=0, \ i=1, 2, \cdots, M$$

写出 Lagrange 函数

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

并设存在同$\mathbf{x}^*$相联结的λ^*，在λ^*的某个区域内存在 $L(\mathbf{x},\lambda)$ 的有限极小。

现在定义

$$L(\mathbf{x}^*, \lambda) = \min_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \lambda) = H(\lambda) \qquad (13.18)$$

其中对于λ的任意给定的值，$\mathbf{x}^*$对应于关于$\mathbf{x}$的极小。若$\lambda=\lambda^*$，则 $\mathbf{x}=\mathbf{x}^*$. 设X是所有使 $\mathbf{g}(\mathbf{x})=0$ 的$\mathbf{x}$的集合，则由

(13.17)和(13.18)式有

$$\min_{x\in X} L(x, \lambda)=\min_{x\in X} f(x)=f(x^*)=H(\lambda^*)$$

但是

$$H(\lambda)=\min_{x} L(x, \lambda)\leqslant\min_{x\in X} L(x, \lambda)=H(\lambda^*)$$

因此

$$H(\lambda)\leqslant H(\lambda^*)$$

且$H(\lambda)$在λ^*取极大，同时$f(x)$在x^*取极小。所以一级问题和二级问题是对偶的。

在对偶可行法中，λ是二级问题的变量，并且

$$dH(\lambda)=dL(x^*(\lambda), \lambda)=\left(\frac{\partial L}{\partial\lambda}\right)^T d\lambda+\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^T\frac{dx}{d\lambda}d\lambda$$

$$=g(x^*)^T d\lambda+\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x^*)+\lambda^T\frac{\partial g}{\partial x}(x^*)\right]^T\frac{dx^*}{d\lambda}d\lambda$$

但是，由一级问题的必要条件，肯定有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^*)+\lambda^T\frac{\partial g}{\partial x}(x^*)=0$$

所以

$$\frac{dH}{d\lambda}(\lambda)=g(x^*)$$

这样为了使$H(\lambda)$取极大，且$dH(x^*(\lambda))>0$，所以我们令

$$d\lambda=kg(x^*)$$

其中$k>0$。按离散算法的形式，这个表达式可写成

$$\lambda^{p+1}=\lambda^p+kg(x^*)^p,\ k>0$$

13-2 如果我们把可行分解法和对偶可行分解法组合在一起，并且在第二级求解S_i和λ_i二者，那么，对这两种分解

的子系统的必要条件求解，会有相当大的简化。这种方法称为**松弛**，试对这种方法确定一级和二级必要条件。

［**解**］ 由方程(13.10)和(13.11)，一级必要条件为

$$\frac{\partial L_i}{\partial x_i}=\frac{\partial f_i}{\partial x_i}+\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_i}\right)^T\mu_i+\lambda_i=0$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial \mu_i}=g_i(x_i,\ S_1,\ S_2,\ \cdots,\ S_j,\ \cdots S_N)_{i\neq j}\geqslant 0$$

$$\mu_i^T g_i=0 \qquad \mu_i\geqslant 0$$

可以对 $x_i(\lambda,\ S)$和$\mu_i(\lambda,\ S)$解出。二级必要条件为

$$\frac{\partial L}{\partial S_i}=0,\qquad \frac{\partial L_i}{\partial \lambda_i}=x_i-S_i=0$$

或

$$S_i=x_i$$

$$\lambda_i=\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial g_j}{\partial S_i}\right)^T\mu_j$$

用这种方法，S_i和λ_i都能作为x和μ的显函数而确定，不再需要梯度算法。由于这种分解法很简单，所以在大多数问题中均采用它。

13-3 清楚说明如何用习题13-2中的松弛法求解一个$N=2$的问题。

［**解**］ 在图13-6中说明了用每个一级子问题和二级子问题解出的必要条件。求解过程为：先给估计值λ_1^0、λ_2^0、S_1^0、S_2^0对 $\mu_1(\lambda_1^0,\ S_2^0)$，$x_1(\lambda_1^0,S_2^0)$，$\mu_2(\lambda_2^0,\ S_1^0)$和$x_2(\lambda_2^0,\ S_1^0)$独立解出每个子问题；然后将这些子问题的解代入到二级方程中，计算λ_1^{p+1}、λ_2^{p+1}、S_1^{p+1}、S_2^{p+1}。按这一方式继续求解直到收敛。

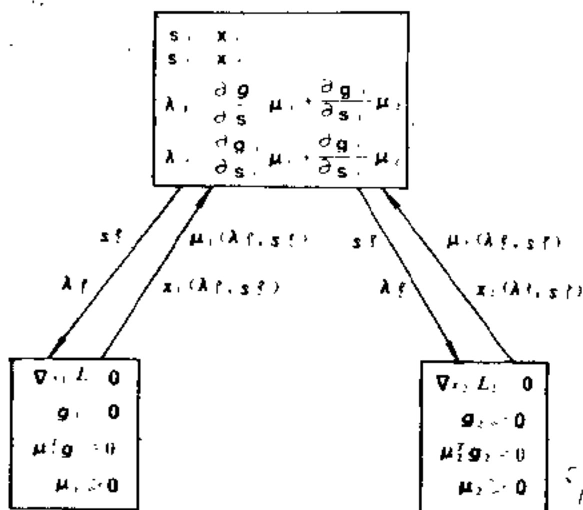


图 13-6

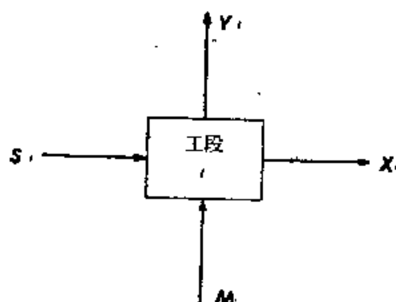


图 13-7

13-4 考虑一个非集中工厂的经营，该厂第 i 个工段表示在图13-7中。与第 i 个工段有联系的变量为

X_i =为进一步加工向其它工段输出的产量。

Y_i＝不要求进一步加工的产量。

M_i＝为生产Y_i和X_i所用的控制。

S_i＝从其它工段的输入。

给每一个工段确定目标函数，它将使整个工厂的利润最大。用对偶可行分解法并设全部N个工段的工段模型用下式给出

$$X_i = T_i(M_i, S_i)$$
$$Y_i = U_i(M_i, S_i)$$

由目标函数知，利润最大值为

$$\max \sum_{i=1}^{N} f_i(M_i, Y_i)$$

我们设工段之间相互联系为

$$S_i = \sum_{j=1}^{N} C_{ij} X_j$$

其中$C_{ij}=[c_{ij}]$是一个0、1矩阵，而

$$c_{ij}=\begin{cases}1 & 若X_j \to S_i \\ 0 & 否则\end{cases}$$

［解］ Lagrange函数为

$$L(M, X, Y, S, \lambda)=\sum_{i=1}^{N}\left[f_i(M_i, Y_i)+\lambda_i^T\left(\sum_{j=1}^{N} C_{ij}X_j - S_i\right)\right]$$

或者

$$L(M, S, \lambda)=\sum_{i=1}^{N}\left[f_i(M_i, U_i(M_i, S_i))+\right.$$

$$\lambda_i^T \sum_{j=1}^{N} C_{ij} T_j(M_j, S_j) - \lambda_i^T S_i \Bigg]$$

现在定义

$$P_i^T = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j^T C_{ji}$$

并且

$$f_i'(M_i, S_i) = f_i(M_i, U_i(M_i, S_i))$$

则

$$L(M, S, \lambda) = \sum_{i=1}^{N} L_i(M_i, S_i, \lambda_i)$$

其中L_i是第i个工段的目标函数，由下式给定

$$L_i(M_i, S_i, \lambda_i) = f_i'(M_i, S_i) + P_i^T T_i(M_i, S_i) - \lambda_i^T S_i$$

$$i = 1, 2, \cdots, N$$

而 P_i 表示产品 x_i 的售价，λ_i 表示原材料 S_i 的成本。

由对偶性，应工段问题是通过选择 M_i 和 S_i 使 L_i 取极小。价格 λ_i 和 P_i 是由负责协调工段的某个中心机构给出的(见习题13-5)。

13-5 为了使整个工厂的利润最大，推出习题13-4中的中心机构所能使用的梯度算法。

[**解**] 该中心机构的任务是选择 λ_i，$i=1,2,\cdots,N$ 使

$$S_i = \sum_{j=1}^{N} C_{ij} X_j$$

因为 $P_i = \sum_{j=1}^{N} C_{ij}^T \lambda_j C_{ij}$ 是给定的，一旦对 $j=1, 2, \cdots, N$ 规定出 λ_i，P_i 就是已知的。定义

$$E_i(\lambda)=S_i-\sum_{j=1}^{N}C_{ij}X_j$$

因为是要求 $L(M, S, \lambda)$关于 λ 的极小，所以

$$E_i(\lambda)=S_i(\lambda)-\sum_{j=1}^{N}C_{ij}T_j(M_j(\lambda), S_i(\lambda))$$

导向梯度算法：

$$\lambda_i^{p+1}=\lambda_i^p+kE_i(\lambda^p),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$$

其中 $k>0$，对于 $N=2$，这个过程导向分散工厂的经营，如图13-8所示。

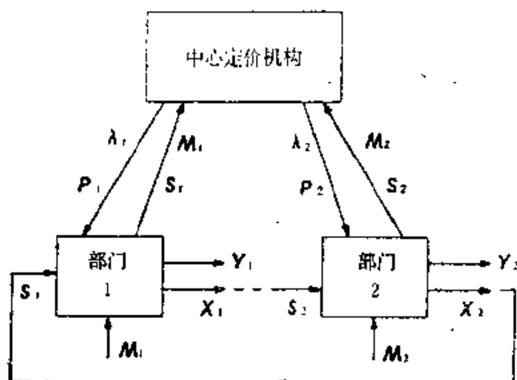


图 13-8

13-6 用对偶可行分解法求解问题：

$$\min\ x_1^2+x_2^2+m^2$$

$$\text{且使}\quad x_1=-x_2+m$$

$$x_2=x_1+k$$

[解] 这个问题可以象图13-9所示那样来分解。

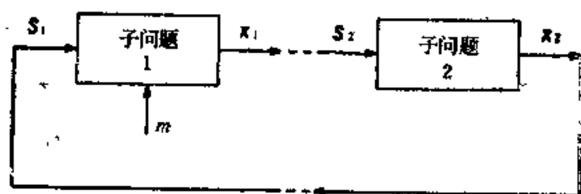


图 13-9

由此得 Lagrange 函数

$$L(x,\ m,\ S,\ \lambda)=x_1^2+x_2^2+m^2+$$

$$\lambda_1(x_1-S_2)+\lambda_2(x_2-S_1)$$

将约束代入消去x，得出

$$L(m,\ S,\ \lambda)=(-S+m)^2+(S_2+k)^2$$

$$+m^2+\lambda_1(-S_1+m-S_2)+\lambda_2(S_2+k-S_1)$$

然后有

$$L_1(S_1,\ m;\ \lambda_1,\ \lambda_2)=(-S_1+m)^2+m^2$$

$$-\lambda_1S_1+\lambda_1m-\lambda_2S_1$$

$$L_2(S_2;\ \lambda_1,\ \lambda_2)=(S_2+k)^2-\lambda_1S_2+\lambda_2S_2+k\lambda_2$$

并且

$$\frac{\partial L_1}{\partial S_1}=-2(-S_1+m)-\lambda_1-\lambda_2=0$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial m}=2(-S_1+m)+2m+\lambda_1=0$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial S_2}=2(S_2+k)-\lambda_1+\lambda_2=0$$

由此得

$$m^*(\lambda)=\frac{1}{2}\lambda_2$$

$$S^*(\lambda)=\lambda_2+\frac{1}{2}\lambda_1$$

$$S_2^*(\lambda)=\frac{1}{2}(\lambda_1-\lambda_2)-k$$

第二级梯度算法由下式给出

$$\lambda_1^{p+1}=\lambda_1^p+kE_1(\lambda^p),\ k>0$$

$$\lambda_2^{p+1}=\lambda_2^p+kE_2(\lambda^p),\ k>0$$

其中

$$E_1(\lambda)=x_1-S_1=-S_1+m-S_2=-\lambda_1+k$$

$$E_2(\lambda)=x_2-S_1=S_2+k-S_1=-\frac{3}{2}\lambda_2$$

当 $E_1(\lambda)=0$ 时，得 $\lambda_1=k$，$x_1^*=S_2$；当 $E_2(\lambda)=0$ 时，得 $\lambda_2=0$，$x_2^*=S_1$。因此

$$m^*(\lambda)=0,\quad S_1^*(\lambda)=\frac{k}{2},\qquad S_2^*(\lambda)=\frac{k}{2}$$

以及

$$x_1^*=\frac{k}{2},\ x_2^*=\frac{k}{2},\ m^*=0$$

13-7　对习题13-6证明满足二级算法的收敛条件。

［证］　由对偶性，因为一级问题是求极小，所以二级问题要求极大。如果每个一级的子问题最优解对应于局部极小，则二级算法收敛对于子问题1，Hesse 矩阵为

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 L_1}{\partial S_1^2} & \dfrac{\partial^2 L_1}{\partial S_1\partial m}\\ \dfrac{\partial^2 L_2}{\partial m\partial S_1} & \dfrac{\partial^2 L_2}{\partial m^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix}$$

主子式是2和4，且都是正的，因此这个问题的解$S_1^*(\lambda)$和$m(\lambda)$是$L_1(S_1, m, \lambda)$的极小。对于子问题2，Hesse矩阵为

$$\frac{\partial^2 L_2}{\partial S_2^2}=2>0$$

所以$S_2^*(\lambda)$是$L_2(S_2, \lambda)$的极小，因此满足收敛条件，习题13-6给出的算法收敛。

13-8　对于习题13-6叙述对偶可行分解的计算过程。

计算步骤为

[解]

1．推测λ_1^0、λ_2^0并置$P=0$。

2．极小化$L_1(S_1, m; \lambda_1^p, \lambda_2^p)$。

3．极小化$L_2(S_2; \lambda_1^p, \lambda_2^p)$。

4．计算$E_1(\lambda^p)$和$E_2(\lambda^p)$。

5．若$\max\limits_i |E_i(\lambda^p)-E_i(\lambda^{p-1})|<\varepsilon$，则停止计算。

6．否则计算λ_1^{p+1}和λ_2^{p+2}。

7．将p增加1并转向第2步。

13-9　用可行分解法求习题13-6的解。

[解]　用可行分解法，每个子问题的Lagrange函数为

$$L_1(\lambda_1, m; S_1, S_2)=(-S_1+m)^2+m^2+\lambda_1(-S_1+m-S_2)$$

$$L_2(\lambda_2; S_1, S_2)=(S_2+k)^2+\lambda_2(S_2+k-S_1)$$

必要条件为

$$\frac{\partial L_1}{\partial \lambda_1}=-S_1+m-S_2=0$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial m}=2(-S_1+m)+2m+\lambda_1=0$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_2}=S_2+k-S_1=0$$

子问题1的解是

$$m^*(S)=s_1+s_2$$

$$\lambda_1^*(S)=2s_1-4s_2$$

然而，对于子问题2，必要条件不产生解 $\lambda_2^*(S)$，因此可行分解法不能用来解这个问题。

13-10　由于计算上的理由。本章讨论的分解方法，只有当子问题容易求解并且相互有关的变量数目很小时，才是切实可行的。具有这些特性的一类最优化问题涉及某些偏微分方程的最优化。

［解］ 考虑问题

$$\min_{m(x)} \int_0^1 [u^2(x)+m^2(x)]dx$$

且使

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=m$$

并带有边界条件

$$u=(0)0,\ u(1)=1$$

如果我们用长 Δx 的离散区段，则问题可近似地提成为

$$\min_{m_i} \sum_{i=1}^{N} (u_i^2+m_i^2),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$$

且使

$$\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x}-\frac{u_i-u_{i-1}}{\Delta x}\right]=m_i$$

或

$$u_{i+1}+u_{i-1}-2u_i=(\Delta x)^2 m_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$$

其中 $\dfrac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x}$ 称为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 的向前差分近似。$\dfrac{u_i-u_{i-1}}{\Delta x}$ 称为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 的向后差分近似。

写成矩阵形式，则为 $\min\limits_{\mathbf{M}}(\mathbf{U}^T\mathbf{U}+\mathbf{M}^T\mathbf{M})$

且使 $\mathbf{AU}=(\Delta x)^2\mathbf{M}+\mathbf{F}$

其中

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & & & & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}^T=[0,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 1]$$

因为矩阵**A**的非对角线项仅表示节点之间的互联，因此将矩阵**A**分块来分解该问题是方便的，于是

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{c:c:c} \mathbf{A}_{11} & 1 & 0 \\ \hline 1 & \mathbf{A}_{22} & 1 \\ \hline 0 & 1 & \mathbf{A}_{33} \end{array}\right]$$

其中子问题之间的互联相应于块状对角矩阵之外的非零项。实际上已经发展[Wismer,1971]，因为强对角形的子矩阵，

这类子问题收敛很快，又因矩阵A的相对稀疏性，多级问题也收敛很快。

补 充 题

13-11 用对偶可行分解法解子问题

$$\min_{m}(x_2-K)^2+m^2$$

且使

$$x_1=\frac{1}{2}x_3^2+2m$$

$$x_2=\frac{1}{2}x_1$$

$$x_3=x_2$$

13-12 对问题13-11确定二级梯度算法，收敛条件满足吗？

13-13 用可行分解法解题13-11。

13-14 用习题13-2中讨论过的松驰法解题13-11。

13-15 用习题13-2中讨论过的松驰法解题13-6。

13-16 对于题13-15精确提出计算过程。

13-17 用对偶可行分解法公式叙述13-10题。

13-18 用可行分解法公式叙述13-10题。

13-19 用习题13-2中讨论过的松驰法公式叙述13-10题。

13-20 用一个实际例子及精心定义的各变量来解释问题13-10的意义。

13-21 用对偶可行分解法公式叙述下列二维最优化问题。

$$m\int_0^1\int_0^1[u^2(x_1, x_2)+m^2(x_1, x_2)]dx_1dx_2$$

且使

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=m(x, x_2)$$

并有边界条件

$$u(0, x_2)=u(1, x_2)=u(x_1, 0)=u(x_2, 0)=1$$

附录　线性规划

这个附录简短地讨论线性规划问题和解这类问题的单纯形算法。关于线性规划有大量的文献，此处只能提供理论上的一个简单轮廓。对于理解非线性规划的算法，线性规划的知识是十分有帮助的，因为非线性规划的很多算法都是以单纯形法的推广为基础的。

在线性规划中，目标函数和约束方程对于自变量来说都是线性的。目标函数是

$$f(\mathbf{x})=(\mathbf{c},\ \mathbf{x})=\mathbf{c}^T\mathbf{x} \tag{A.1}$$

其中 $\mathbf{c}$，$\mathbf{x}\in E^n$。约束方程是

$$\begin{aligned}&\mathbf{A}\mathbf{x}\leqslant\mathbf{b}\\&\mathbf{x}\geqslant 0\end{aligned} \tag{A.2}$$

其中 $\mathbf{b}\in E^m$，$\mathbf{A}$ 是 $m\times n$矩阵，由所有的可行解构成的集合定义作 $\mathbf{M}=\{\mathbf{x}|\mathbf{x}\in E^n,\ \mathbf{A}\mathbf{x}\leqslant\mathbf{b},\ \mathbf{x}\geqslant 0\}$，线性规划问题就在于求 $f(\mathbf{x})$在 M 上的极值。为确定性起见，本附录中将考虑 $\max\limits_{\mathbf{x}\in M} f(\mathbf{x})$。

如果在式($A.2$)中有 $\mathbf{b}\geqslant 0$，则称上述线性规划问题是**规范形式**的。这时，$0\in M$，保证 M 非空。因为任意线性规划问题总可以变换为这种形式，所以我们只限于讨论规范形式的线性规划。若引进**松弛变数** $\mathbf{u}=\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}$，将不等式约束变为等式约束，那么($A.2$)等价于

$$\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{u}=\mathbf{b},\ \mathbf{x},\ \mathbf{u}\geqslant 0 \tag{A.3}$$

令 $\mathbf{B}=[\mathbf{A}, \mathbf{L}]$，　$\mathbf{y}=[\mathbf{x}^T, \mathbf{u}^T]^T$，可见每个 $\mathbf{y}\geqslant 0$ 满足 $\mathbf{By}=\mathbf{b}$ 就是(A.3)的一个可行解。这时所有可行解所成的集合可以定义作 $Y=\{\mathbf{y}|\mathbf{y}\in E^{m+n}, \mathbf{By}=\mathbf{b}, \mathbf{y}\geqslant 0\}$。如果给向量 $\mathbf{c}$ 附加 m 个零分量，用这扩展了的向量 $\mathbf{c}$，可将该线性规划问题改述为 $\max\limits_{\mathbf{y}\in Y}(\mathbf{c}, \mathbf{y})$

例 A-1　一个投资公司将资金投入不动产和油井。假设每项投资的资本量有一个最高限额，分别用 b_1、b_2 表示。设可用于投资的整个资本量不超过 b_3。问在利润与投资具有线性关系的假设下，如何使该投资公司的总利润最大。

［解］　设 x_1 和 x_2 分别代表在不动产和油井方面的投资。根据定义，有 x_1、x_2、b_1、b_2、$b_3\geqslant 0$，并且对投资的约束为 $0\leqslant x_1\leqslant b_1$，$0\leqslant x_2\leqslant b_2$，$0\leqslant x_1+x_2\leqslant b_3$。设 $f(x_1, x_2)=c_1x_1+c_2x_2$ 代表从投资 x_1、x_2 所得的总利润，问题就成为关于 x_1、x_2 求 $f(x_1、x_2)$的极大，同时要满足上述给定的约束。

令

$$\mathbf{b}=[b_1, b_2, b_3]^T \qquad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

可行解集成为 $M=\{\mathbf{x}|\mathbf{x}\in E^2, \mathbf{Ax}\leqslant\mathbf{b}, \mathbf{x}\geqslant 0\}$，如图 A-1 的阴影区域所示。假定 $c_1=2$，$c_2=4$，等值线 $f(x_1, x_2)=$常数也画在图上。沿着图 A-1 中的箭头方向穿过这些等值线，$f(x_1, x_2)$的值逐步上升，直到在点 $\mathbf{x}^*=[b_3-b_2, b_1]^T$ 达到最大值，这时 $f(x_1^*, x_2^*)=2(b_3-b_2)+4b_2$。问题的最优解由 $\mathbf{x}^*$ 给出，因为对于同样的投资量油井所产生的利润为不动产利润的两倍，显然应该尽可能多地将资本投向油井，余下的

资本投入不动产。图解所得的最优解X^*与资金的这一分配法是符合的。

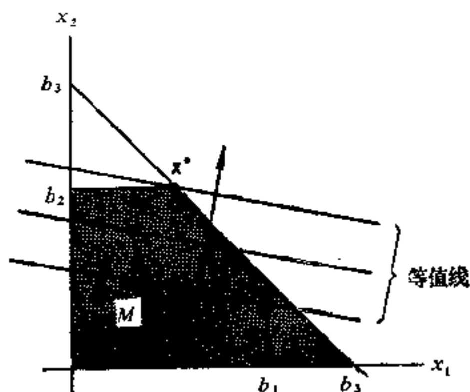


图 A-1

例 A-2 某农场主要求为家畜每天配给的食料中，包含 *A*、*B*、*C* 三种养分，它们分别至少为 4、12 和 2 单位。有两种饲料可供使用，每一种每单位重量所含三种养分数如下表所示：

养　　分	含　　量	
	饲　料　1	饲　料　2
A	1	1
B	6	2
C	0	1

两种饲料每单位重量的价格分别为 1 和 2 货币单位，试求满足养分要求的最廉价的食料配方。

［解］ 设 x_1、x_2 分别代表食料所含饲料 1 和饲料 2 的

数量，从实际考虑可得 x_1，$x_2 \geqslant 0$，为使食料满足对养分 A 的需要，应要求 $x_1+x_2 \geqslant 4$。对养分 B 和 C 的类似考虑给出 $6x_1+2x_2 \geqslant 12$，$0x_1+x_2 \geqslant 2$。令

$$\mathbf{b}=[4,\ 12,\ 2]^T \qquad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可行解集成为 $M=\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in E^2,\ \mathbf{Ax} \geqslant \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqslant 0\}$。在图 A-2 中用阴影区域表示。食料的费用为 $f(x_1,\ x_2)=x_1+2x_2$。其等值线也画在图 A-2 中。沿箭头方向穿过等值线，$f(x_1,\ x_2)$逐步下降，直到在 $\mathbf{x}^*=[2,2]^T$ 达到最小值。食料的最优配方为 $x_1^*=2$ 单位，$x_2^*=2$ 单位。

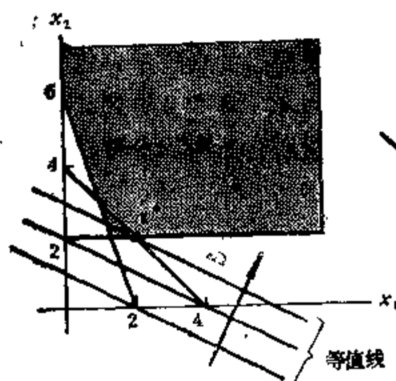


图 A-2

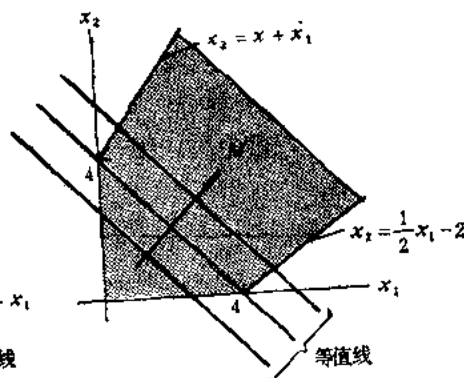


图 A-3

例 A-3 考虑在图 A-3 中以阴影区域表示的可行解集合 $M=\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in E^2,\ \mathbf{Ax} \leqslant \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqslant 0\}$，其中

$$\mathbf{b}=[4,\ 4]^T \quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

试求 $f(x_1, x_2)=x_1+x_2$ 在集合 M 上的最大值。

[解] 如图 A-3 所示，集合 M 是无界的，沿箭头方向穿过等值线 $f(x_1, x_2)=$常数，$f(x_1, x_2)$不能在 x_1、x_2的有限值处获得最大值，因此，这一问题没有有限的最优解。

例 A-4 考虑求$f(x_1,x_2)=-x_1+4x_2$在集合M上的最大值的问题。M由图A-4 的阴影区域给出。试图解这一问题。

[解] $f(x_1, x_2)$的等值线也画在图 A-4 中，沿箭头方向穿过等值线，$f(x_1, x_2)$的值上升，并在 $\mathbf{x}^*=[0, 2]^T$ 达到它在 M 上的最大值。因此，$\mathbf{x}^*=[0, 2]^T$ 是该问题的最优解，我们看到，尽管 M 是无界的，但仍有有限的最优解。

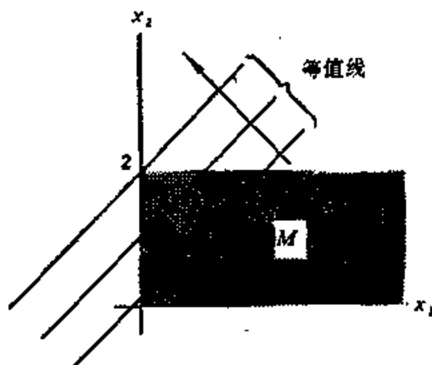


图 A-4

一、基本可行解

设由 $\mathbf{A}\mathbf{x}\leqslant\mathbf{b}$ 给出的线性不等式的约束，借助于松驰变数已变换成为等式约束 $\mathbf{B}\mathbf{y}=\mathbf{b}$，又设线性规划问题是规范形式的，即 $\mathbf{b}\geqslant\mathbf{0}$。等式约束 $\mathbf{B}\mathbf{y}=\mathbf{b}$ 可以写作

$$
\begin{array}{l}
b_{11}y_1+\cdots+b_{1,m+n}y_{m+n}=b_1 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
b_{m1}y_1+\cdots+b_{m,m+n}y_{m+n}=b_m
\end{array}
\tag{A.4}
$$

其中 b_{ij} 表示 $m\times(m+n)$矩阵 $\mathbf{B}$ 的第$(i,\ j)$个元素，y_j 和 b_j 分别是向量 $\mathbf{y}$ 和 $\mathbf{b}$ 的第 j 个分量。在$(A.4)$式中我们有 $m+n$ 个未知数 $y_1,\ \cdots,\ y_{m+n}$ 的 m 个线性代数方程。如果令任意 n 个未知数为 0，由$(A.4)$式则得 m 个未知数的 m 个方程。不失一般性，我们假设 $y_1\neq0,\ \cdots,\ y_m\neq0$ 和 $y_{m+1}=\cdots=y_{m+n}=0$，那么倘若列向量

$$
\begin{bmatrix} b_{11} \\ \cdots \\ \cdots \\ b_{m1} \end{bmatrix},\ \cdots,\ \begin{bmatrix} b_{1m} \\ \cdots \\ \cdots \\ b_{mm} \end{bmatrix}
\tag{A.5}
$$

线性无关，并因而构成 E^m 的一组基，则可以解出 (A.4) 而得唯一的 $y_1,\ \cdots,\ y_m$ 值，这样的解称为**基本解**，相应地 $y_1,\ \cdots,y_m$ 称为**基本变量**。如果用 $\mathbf{B}_1$ 代表 $m\times m$ 矩阵，它的列向量是 $(A.5)$式所给出的线性无关向量组，则基本解可以写作 $\mathbf{Y}=[(\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{b})^T,\ (\mathbf{0})^T]^T$。其次我们看出，基本解并不总是可行解，因为可能有 $y_j<0$，$1\leqslant j\leqslant m$，因此，如果 $y_j\geqslant0$ 对所有的 $1\leqslant j\leqslant m$ 成立，称这样的基本解为**基本可行解**。如果对所有的 j，$1\leqslant j\leqslant m$，有 $y_j>0$，称 y 为**非退化解**。如果有一个以上的基本变数为 0，则称解是**退化的**。从一个给定的基本解开始，令 m 个基本变数中的某一个为 0，而用一个非基本变数取代它，就可以构成一个新的基本解。为此目的而选出的非基本变数称为**进入变数**，而被置等于 0 的基本变数称为**离去变数**。

假设 $\mathbf{y}^0$ 是一个基本可行解（非退化的），这蕴涵着 $y_i^0>0$，$i=1,\cdots,m$，$y_i^0=0$，$i=m+1,\cdots,m+n$。又设向量 $\mathbf{b}^i$，$i=1,\cdots,m$ 线性无关，并构成 E^m 的一组基。这时可以将任意向量 $\mathbf{b}^j=[b_{1j},\cdots,b_{mj}]^T$ 表示为 $\mathbf{b}^j=\sum_{i=1}^{m}\lambda_{ij}\mathbf{b}^i$，其中向量 $\mathbf{b}^i$ 被用作基向量。因为 $\mathbf{y}^0$ 是$(A.4)$式的一个基本解，我们有 $\sum_{i=1}^{m}y_i^0\mathbf{b}^i=\mathbf{b}$。使用 $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{b}^j$ 的这些表达式，得到

$$\sum_{i=1}^{m}y_i^0\mathbf{b}^i+\theta\left[\mathbf{b}^j-\sum_{i=1}^{m}\lambda_{ij}\mathbf{b}^i\right]=\mathbf{b}$$

或者

$$\sum_{i=1}^{m}(y_i^0-\theta\lambda_{ij})\mathbf{b}^i+\theta\mathbf{b}^j=\mathbf{b} \tag{A.6}$$

现在，如果缓慢地增大 $\theta\geqslant0$，而同时保持 $y_i^0-\theta\lambda_{ij}\geqslant0$，$i=1,\cdots,m$，那么向量 $\mathbf{b}^j$ 在 $\mathbf{b}$ 的表达式中占的成分就越来越大。

在$(A.6)$式中，设 $y_k^0/\lambda_{kj}=\min\{\lambda_i^0/\lambda_{ij}$，所有 $\lambda_{ij}>0\}$，并且令 $\theta=y_k^0/\lambda_{kj}$，可以看出 $\mathbf{b}^k$ 的系数为 0，亦即在式$(A.6)$中，$\mathbf{b}^k$ 被 $\mathbf{b}^j$ 所取代。如果 $\mathbf{y}^1$ 代表一个向量，它的 m 个非负分量由$(A.6)$中的非 0 系数给出，那么，$\mathbf{y}^1$ 就是一个由 $\mathbf{y}^0$ 得到的新的基本可行解。下列例子为上面讨论的代数过程提供了一个几何解释。

例 A-5 考虑线性规划问题，其矩阵

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$\mathbf{b}=[6,\ 10,\ 6]^T$，求可行解集 M，并从 $\mathbf{y}^0=[4,\ 6,\ 0,\ 0,\ 8]^T$出发，构造从 $\mathbf{y}^0$ 可以得到的所有其他的基本可行解。

［解］ 仍按我们的习惯，$\mathbf{B}=[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$，$\mathbf{y}=[\mathbf{x}^T,\ \mathbf{u}^T]^T$，得到

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{x}=[x_1,x_2]^T,\mathbf{u}=[u_1,\ u_2,u_3]^T$$

包含所有满足 $\mathbf{A}\mathbf{x}\leqslant\mathbf{b}$ 的向量 $\mathbf{x}$ 的集合 M，在图 A-5 中用阴影区域表示。

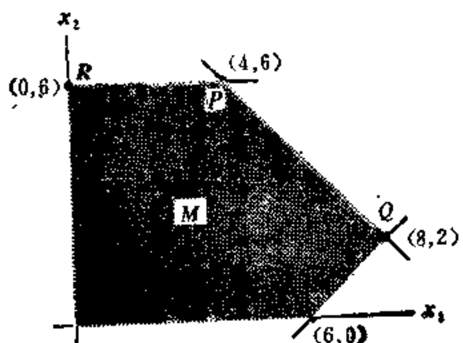


图 A-5

其次，在基本可行解 $\mathbf{y}^0=[4,\ 6,\ 0,\ 0,\ 8]^T$ 中，我们注意到 $x_1=4$，$x_2=6$，这相应于图 A-5 所示的 M 的顶点 P。因为在 $\mathbf{y}^0$ 中有 $u_1=u_2=0$，所以基向量是 $\mathbf{b}^1=[0,\ 1,\ 1]^T$，$\mathbf{b}^2=[1,\ 1,\ -1]^T$ 和 $\mathbf{b}^5=[0,\ 0,\ 1]^T$。容易验证 $\mathbf{b}^3=-\mathbf{b}^1+\mathbf{b}^2+2\mathbf{b}^5$，$\mathbf{b}^4=\mathbf{b}^1+0\mathbf{b}^2-\mathbf{b}^5$。

现在假定我们将$\mathbf{b}^3$引入基向量集合中，这要求根据以下的考虑从原来的基向量$\mathbf{b}^1$，$\mathbf{b}^2$，$\mathbf{b}^5$中消去一个。为了决定究竟应该消去哪一个，我们用$\mathbf{b}^3$的上述表达式和(A.6)式，以得到

$$[4-\theta(-1)]\mathbf{b}^1+[6-\theta(1)]\mathbf{b}^2+[8-\theta(2)]\mathbf{b}^5+\theta\mathbf{b}^3=\mathbf{b}$$

这时，通过直接计算，有 $\min(y_i^0/\lambda_{i3})=\min\left(6,\ \frac{8}{2}\right)=4$，再令$\theta=4$。得到

$$8\mathbf{b}^1+2\mathbf{b}^2+0\mathbf{b}^5+4\mathbf{b}^3=\mathbf{b}$$

于是$\mathbf{b}^5$被消去，并得到新的基本可行解
$\mathbf{y}^1=[8,\ 2,\ 4,\ 0,\ 0]^T$。在$\mathbf{y}^1$中有$x_1=8$，$x_2=2$。这相应于$M$的顶点$Q$

如果是将$\mathbf{b}^4$引入基向量集合，并用上面给出的$\mathbf{b}^4$表达式和(A.6)式，得到

$$[4-\theta(1)]\mathbf{b}^1+[6-\theta(0)]\mathbf{b}^2+[8-\theta(-1)]\mathbf{b}^5+\theta\mathbf{b}^4=\mathbf{b}$$

这时 $\min(y_i^0/\lambda_{i4})=\min 4=4$。再令$\theta=4$，得到

$$0\mathbf{b}^1+6\mathbf{b}^2+12\mathbf{b}^5+4\mathbf{b}^4=\mathbf{b}$$

于是$\mathbf{b}^1$被消去，并且得到新的基本可行解$\mathbf{y}^2=[0,\ 6,\ 0,\ 4,\ 12]^T$。在$\mathbf{y}^2$中，有$x_1=0$，$x_2=6$，这相应于$M$的顶点$R$。从图$A$–5我们清楚地看到：获得新的基本可行解的代数过程，相应于从M的一个给定的顶点移动到相邻的一个顶点。M的每一个顶点都联系着一个基本可行解，而且每个顶点都可以通过计算与之相联系的基本可行解而得到。

二、单纯形算法

单纯形算法是 Dantzig 为求解线性规划问题而建立的。我们注意到在例 $A-1$，$A-2$ 和 $A-5$ 中，最优解都是集 M 的顶点。当目标函数是线性的，集合 M 是凸多面体，并且最优解存在时，至少有 M 的一个顶点是最优解。因此，在解线性规划问题,可以通过计算目标函数在 M 的顶点上的值，并且比较这些值来确定最优解。单纯形算法是实现这一程序的一个有效的方法。

我们已经讨论过一个代数过程，通过与顶点相联系的基本可行解，从 M 的任意一个顶点移动到一个相邻的顶点。单纯形算法的一个构成部分，就是使用这一过程产生 M 的新的顶点，以试探求最优解。单纯形算法不计算目标函数在 M 的每一个顶点上的值，而是通过选择某些有希望的顶点，更简捷地搜索最优解。为确定性起见，我们假设是求函数 $f(x)$ 在 M 上的极大。单纯形算法只有当 $f(x)$ 在一顶点上的值有希望至少同已计算过的顶点上的值一样大时，才产生这个顶点。

正如在开头一段中所述，我们假设线性规划问题是 $\max(\mathbf{c},\ \mathbf{y})$，$\mathbf{y}\in Y$。设 $\mathbf{y}^0$ 代表初始基本可行解，$\mathbf{y}$ 是利用 $(A.6)$ 式从 $\mathbf{y}^0$ 求得的新的基本可行解，那么计算在点 $\mathbf{y}$ 的目标函数值就有

$$(\mathbf{c},\ \mathbf{y})=\sum_{i=1}^{m}(y_i^0-\theta\lambda_{ij})c_i+\theta c_j$$

$$=(\mathbf{c},\ \mathbf{y}^0)-\theta(z_j-c_j) \qquad (A.7)$$

其中 $z_j=\sum_{i=1}^{m}\lambda_{ij}c_i$。这时要分清下列三种情况：

Ⅰ. 在 $m+1$ 和 $m+n$ 之间存在 j_0，使得 $z_{j_0}-c_{j_0}<0$，并且对于某个 i 有 $\lambda_{ij_0}>0$。令 $\theta=\min(y_i^0/\lambda_{ij_0})$，其中的 min 是对满足 $\lambda_{ij_0}>0$ 的所有的 i 取的。我们看到 $\theta>0$ 且 $y_i^0+\theta\lambda_{ij_0}\geqslant 0$，$i=1, \cdots, m$。等号至少对一个 i 值成立。这样选择 θ 而确定的向量 $\mathbf{y}^1$，满足($A.6$)式并且最多有 m 个非负分量，因而这是($A.4$)式的一个基本可行解。从方程($A.7$)可知，$(\mathbf{c}, \mathbf{y}^1)>(\mathbf{c}, \mathbf{y}^0)$，因此得到一个新的基本可行解，在这点上有更大的目标函数值。

Ⅱ. 不等式 $z_j-c_j\geqslant 0$ 对 $m+1$ 与 $m+n$ 之间的所有的 j 都成立。这时 $\mathbf{y}^0$ 是最优基本可行解。为了证明这一点，令 $\mathbf{y}$ 代表($A.4$)式中的任意一个基本可行解，因为 $\mathbf{y}^0$ 也是($A.4$)的基本可行解，所以

$$\mathbf{b}=\sum_{j=1}^{n}y_j\mathbf{b}^j=\sum_{j=1}^{n}y_j\left[\sum_{i=1}^{m}\lambda_{ij}\mathbf{b}^i\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\mathbf{b}^i\left[\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}y_j\right]=\sum_{i=1}^{m}y_i^0\mathbf{b}^i$$

由于 $\mathbf{b}^i$，$i=1, \cdots, m$ 线性无关，得出 $y_i^0=\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}y_j$，并且这里所给的条件等价于 $z_j\geqslant c_j$，$j=m+1, \cdots, m+n$。$z_j=c_j$，$j=1, \cdots, m$。因此

$$\sum_{j=1}^{n}y_jc_j\leqslant\sum_{j=1}^{n}y_jz_j=\sum_{j=1}^{n}y_j\left[\sum_{i=1}^{m}\lambda_{ij}c_i\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i \left[\sum_{j=1}^{n} y_{ij} y_j \right] = \sum_{i=1}^{m} y_i^0 c_i$$

亦即，对于($A.4$)式的任意基本可行解 $\mathbf{y}$，$(\mathbf{c}, \mathbf{y}) \leqslant (\mathbf{c}, \mathbf{y}^0)$ 因而 $\mathbf{y}^0$ 是最优解。

Ⅱ. 在 $m+1$ 和 $m+n$ 之间存在 j_0 使得 $z_{j_0} - c_{j_0} < 0$ 并且 $\lambda_{ij_0} \leqslant 0$，$i=1, \cdots, m$。这时，$y_i^0 - \theta\lambda_{ij} \geqslant 0$，因而对于所有的 $\theta > 0$，$\mathbf{y}^0$ 都是($A.4$)的基本可行解。当 $\theta \to +\infty$，从($A.7$)式显然可见无限地增大，因而该问题没有有限的最优解。

现在很清楚，上述方案产生($A.4$)的新的基本可行解，使得$(\mathbf{c}, \mathbf{y})$的值是逐步上升的，如果问题有有限的最优解，在有限次迭代之后将至少求得其中之一。否则，将遇到第Ⅱ种情形，那时迭代可以停止。

三、单纯形表

假设有($A.4$)的基本可行解 $\mathbf{y}^0$，设 $\mathbf{b}^j$，$j=1, \cdots, m$ 代表与 $\mathbf{y}^0$ 相关联的基向量。然后，按照

$$\mathbf{b}^j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} \mathbf{b}^i \qquad j=0, 1, \cdots, m+n$$

计算系数 λ_{ij}，其中 $\mathbf{b}^0 = \mathbf{b}$。将这些量填入称作**单纯形表**的表$A$-1 中。用这种表作为留存单纯形法所涉及的各种量的一种适宜的方法。

第二步查验单纯形表最后一行的元素。如果 $z_j - c_j \geqslant 0$ 对所有的 j 成立，则 $\mathbf{y}^0$ 是最优解。然而，如果在 $m+1$ 和

表 A-1 单纯形表

基向量	b_1	…	b^j	…	b^{m+n}	b
b^1	λ_{11}		λ_{1j}		$\lambda_{1,m+n}$	λ_{10}
⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
b^m	λ_{m1}		λ_{mj}		$\lambda_{m,m+n}$	λ_{m0}
z	z_1	…	$z_j=\sum_{i=1}^{m}\lambda_{ij}c_i$	…	z_{m+n}	
$z-c$	z_1-c_1	…	z_j-c_j	…	$z_{m+n}-c_{m+n}$	

$m+n$ 之间存在一个 j_0，使得 $z_{j_0}-c_{j_0}<0$，则检验第 j_0 列的元素 λ_{ij_0}，并且如果 $\lambda_{ij_0}<0$，$i=1$，…，m，则问题没有最优解。

如果有 $z_{j_0}-c_{j_0}<0$ 且对某个 i，$\lambda_{ij_0}>0$，那么我们可以求得($A.4$)的具有较大函数值的一个新的基本可行解。实际上，合理的应是选取使 $z_{j_0}-c_{j_0}$ 具有最大负值的 j_0，因为这样的选择可以减少为求得最优解所必须的迭代次数。$\mathbf{y}^1$ 的分量是 $y_i^1=y_i^0-\theta\lambda_{ij_0}$；$i=1$，…，$m$，$y_{j_0}^1=\theta$，其中

$$\theta=\min_{\lambda_{ij_0}>0}\frac{y_i^0}{\lambda_{ij_0}}$$

其他分量为 0，令 p_0 是一个使得 $y_{p_0}^0-\theta\lambda_{p_0j_0}=0$ 的元素，我们看到同 $\mathbf{y}^1$ 相关联的基向量是 $\mathbf{b}^i$，$i=1$，…，m，$(i\neq p_0)$ 和 $\mathbf{b}^{j_0}$。这等价于用 $\mathbf{b}^{j_0}$ 取代原来的基中的 $\mathbf{b}^{p_0}$。现在可以计算与 $\mathbf{y}^1$ 相关联的单纯形表。为简化表示起见，设 $p_0=k$

这时，由向量b^2，…，b^m和b^{j_0}组成新的基。此时，任意向量b^k可以写作这组新基的线性组合。于是

$$b^k=\sum_{i=2}^{m}\hat{\lambda}_{ik}b^i+\hat{\lambda}_{j_0k}b^{j_0} \qquad (A.8)$$

并可以将$b^{j_0}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_{ij_0}b^i$改写为

$$b^1=-\sum_{i=2}^{m}\frac{\lambda_{ij_0}}{\lambda_{1j_0}}b^i+\frac{1}{\lambda_{1j_0}}b^{j_0}$$

将这一表达式代入到$b^k=\sum_{i=1}^{m}\lambda_{ik}b^i$中，得到

$$b^k=-\lambda_{1k}\sum_{i=2}^{m}\frac{\lambda_{ij_0}}{\lambda_{1j_0}}b^i+\frac{\lambda_{1k}}{\lambda_{1j_0}}b^{j_0}$$

$$+\sum_{i=2}^{m}\lambda_{ik}b^i \qquad (A.9)$$

比较$(A.8)$和$(A.9)$式的系数，得到

$$\hat{\lambda}_{ik}=\begin{cases}\lambda_{ik}-\dfrac{\lambda_{1k}\lambda_{ij_0}}{\lambda_{1j_0}} & i\neq j_0\\ \dfrac{\lambda_{1k}}{\lambda_{1j_0}} & i=j_0\end{cases} \qquad (A.10)$$

这里用$(A.10)$式给出的$\hat{\lambda}_{ik}$形成与y^1相结合的单纯形表，随后[illegible]相关联的新表来查验y^1是最优解呢，还是该问题没有有限的最优解？这两种情况下迭代都停止。出现

另外的情况则继续迭代过程，直到最优解找到为止。

例A-6 对于例 A-1 中提出的线性规划问题，假设 $c_1=2$，$c_2=4$，$b_1>b_3>b_2$。用单纯形法求最优解。

［**解**］ 可行解集在图 A-6 中用阴影区域表示，并且给出了目标函数 $f(x_1, x_2)=2x_1+4x_2$ 的等值线，使用例 A-1 的图解法，我们看到最优解是 $\mathbf{x}^*=[b_3-b_2, b_2]^T$。

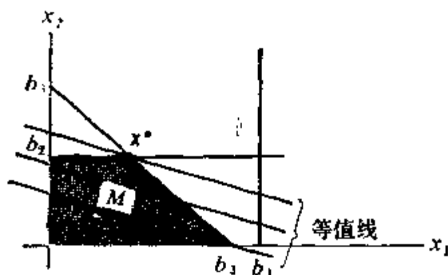


图 A-6

这一问题的约束不等式可以写作

$$x_1 \leqslant b_1$$

$$x_2 \leqslant b_2$$

$$x_1+x_2 \leqslant b_3$$

使用松弛变数 u_1、u_2、u_3，可将这些不等式变换为

$$x_1+u_1=b_1$$

$$x_2+u_2=b_2$$

$$x_1+x_2+u_3=b_3$$

矩阵 **B** 由

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

给出，$y=[x_1, x_2, u_1, u_2, u_3]^T$，我们选 $y^0=[0, 0, b_1, b_2, b_3]^T$以开始单纯形法，$y^0$ 满足方程$By^0=b$，其中$b=[b_1, b_2, b_3]^T$。基变数是u_1，u_2，u_3，B矩阵相应的列向量($b^3=[1, 0, 0]^T$，$b^4=[0, 1, 0]^T$，$b^5=[0, 0, 1]^T$)形成 E^3 的一组基。因为b^3、b^4、b^5是E_3中的坐标向量，所以系数 λ_{ij} 可以通过观察得到。与 y^0 相关联的单纯形表如下：

基向量	b^1	b^2	b^3	b^4	b^5
b^3	1	0	1	0	0
b^4	0	1	0	1	0
b^5	1	1	0	0	1
z	0	0	0	0	0
z−c	−2	−4	0	0	0

在该单纯形表中，$z_1-c_1=-2<0$，$z_2-c_2=-4<0$，因为 $z_2-c_2<z_1-c_1$，我们引入 b^2 作为新的基向量，这时 x_2 成为进入变数，下面确定离去变数。因为 $b_3>b_2$，我们有 $\theta=\min(b_2, b_3)=b_2$，$y^1=[0, b_2, b_1-b_2, 0, b_3-b_2]^T$ 因为在 y^1 中 $u_2=0$，断定 u_2 是离去变数。

相应于 y^1 的基变数是 x_2、u_1 和 u_3，新的基向量是 $b^2=[0, 1, 1,]^T$，$b^3=[1, 0, 0]^T$ 和 $b^5=[0, 0, 1]^T$。对于这组新基有 $b^1=0b^2+b^3+b^5$，$b^4=b^2+0b^3-b^5$。这给出了系数 λ_{ij} 的值，导致下述单纯形表：

上表中 $z_1-c_1=-2<0$，因而我们引入 b^1 作为新的基

基向量	b^1	b^2	b^3	b^4	b^5
b^2	0	1	0	1	0
b^3	1	0	1	0	0
b^5	1	0	0	−1	1
z	0	4	0	4	0
z−c	−2	0	0	4	0

向量，于是 x_1 成为进入变数。下面如前边那样确定离去变数。因为 $b_1>b_3>b^2$，我们有 $\theta=\min(b_1-b_2,\ b_3-b_2)=b_3-b_2$，所以 $y^2=[b_3-b_2,\ b_2,\ b_1-b_3,\ 0,\ 0]^T$，这表明 x_3 是离去变数。

现在，对于基本可行解 $y^2=[b_3-b_2,\ b_2,\ b_1-b_3,\ 0,\ 0]^T$，有 $x_1=b_3-b_2$，$x_2=b_2$，所以 $x_1=x_1^*$，$x_2=x_2^*$。这里用单纯形方法搜索的路径画示在图 A-6 中。

四、对偶问题

每一个线性规划问题都有另外一个线性规划问题与它相关联，我们称其中的一个为**原**问题，另一个为原问题的**对偶**。假定我们取前边引入的求最大值的问题作为原问题，也就是说 $\max\limits_{x\in M}(c,\ x)$，其中 $M\{x|x\in E^n,\ Ax\leqslant b,\ x\geqslant 0\}$。那么相关联的对偶问题就是 $\min\limits_{z\in N}(b,\ z)$，其中 $N=\{z|z\in E^m,\ Az\geqslant c,\ z\geqslant 0\}$。我们注意到，在某一个问题中的每个约束，对

应于另一问题中的一个变数，原问题的约束向量 b 产生对偶问题的目标函数，反之亦是，约束不等式的方向相反（在原问题中是$\leqslant$，在对偶问题中是$\geqslant$）。

这两个问题以及它们的最优解是联系在一起的，从一个问题的最优解得到另一个问题的最优解的全部的信息。在本段中，我们借助于例题来研究这样两个问题的相互联系。

例 A-7 证明$\max\limits_{x\in M}(\mathbf{c},\ \mathbf{x})\leqslant\min\limits_{z\in N}(\mathbf{b},\ \mathbf{z})$

［证］ 注意到 $\mathbf{z}\geqslant 0$，我们先用 $\mathbf{z}^T$ 左乘原问题的约束 $\mathbf{A}\mathbf{x}\leqslant\mathbf{b}$，得到 $\mathbf{z}^T\mathbf{A}\mathbf{x}\leqslant\mathbf{z}^T\mathbf{b}=(\mathbf{b},\ \mathbf{z})$，类似地，注意到 $\mathbf{x}\geqslant 0$，并用 $\mathbf{x}^T$ 左乘对偶问题的约束 $\mathbf{A}^T\mathbf{z}\geqslant\mathbf{c}$，得到 $\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{z}\geqslant\mathbf{x}^T\mathbf{c}=(\mathbf{c},\ \mathbf{x})$。将这两个关系式组合，就有$(\mathbf{c},\ \mathbf{x})\leqslant\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{z}=\mathbf{z}^T\mathbf{A}\mathbf{x}\leqslant(\mathbf{b},\ \mathbf{z})$，对所有的 $\mathbf{x}\in M$、$\mathbf{z}\in N$ 成立，从而得到所要求的结果。

例 A-8 证明对于原问题和对偶问题的最优可行解，只要一个系统的第 k 个约束中有不等式出现(也就是对应的松弛变数是负的)，它的对偶问题的第 k 个变数必定为 0。

［证］ 引入松弛变数 $\mathbf{u}=\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}\geqslant 0$ 和 $\mathbf{v}=\mathbf{A}^T\mathbf{z}-\mathbf{c}\geqslant 0$，将原问题和对偶问题的不等式约束改写作 $\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{u}=\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{A}^T\mathbf{z}+\mathbf{v}=\mathbf{c}$。令 $g(\mathbf{z})=(\mathbf{b},\ \mathbf{z})$ 并使用 $\mathbf{b}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{u}$，就有 $g(\mathbf{z})=\mathbf{z}^T\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{z}^T\mathbf{u}$。计算$g(\mathbf{z})-f(\mathbf{x})$，其中 $f(\mathbf{x})=(\mathbf{c},\ \mathbf{x})$，得到 $g(\mathbf{z})-f(\mathbf{x})=\mathbf{z}^T\mathbf{u}+(\mathbf{A}^T\mathbf{z}-\mathbf{c})^T\mathbf{x}=\mathbf{z}^T\mathbf{u}+\mathbf{v}^T\mathbf{x}$。其次考虑当$\mathbf{x}=\mathbf{x}^*$和 $\mathbf{z}=\mathbf{z}^*$时，即分别为原问题和对偶问题的最优解的情形，使用例 A-7，有 $g(\mathbf{z}^*)-f(\mathbf{x}^*)=0$，即 $(\mathbf{z}^*)^T\mathbf{u}^*+(\mathbf{v}^*)^T\mathbf{x}^*=0$。因为$\mathbf{x}^*$，$\mathbf{z}^*$，$\mathbf{v}^*$，$\mathbf{u}^*\geqslant 0$，如果 $u_k^*>0$($v_k^*>0$)，则 $z_k^*=0$($x_k^*=0$)，这就证明了所给的命题。

一个线性规划问题可以叙述作原问题的形式，也可以叙

述作对偶问题的形式。这一选择的根据是计算的效率。一般说来，约束的个数太多会增加计算的复杂性，因为约束的个数决定了为获得基本可行解而需要的基向量的数目，因此，如果原问题含有大量的约束，而自变量的个数相对较少，考虑求解对偶问题会在计算上带来好处。习题 A-7—A-9 表明，一个问题的最优解怎样才能从关于它的对偶问题的最优解的知识中求得。

习题与题解

A-1 两个发电站，输出功率分别为 x_1 和 x_2。两站的最大可利用功率分别为 p_1、p_2。令 $f(x_1, x_2)=x_1+2x_2$ 代表生成功率的总费用，求两电站的功率分配，以使在供给 L 单位功率的规定负荷时，使总费用为最小。

［**解**］ 两电站功率输出的约束分别是 $0\leqslant x_1\leqslant p_1$ 和 $0\leqslant x_2\leqslant p_2$，这两个约束确定了图 A-7 中的阴影区域，称为**操作区域**。因为两站供应 L 单位的负载，我们有 $x_1+x_2=L$，这称作**负载线**，也表示在图 A-7 中。这一问题的可行域是负载线位于操作区域之内的那一线段。

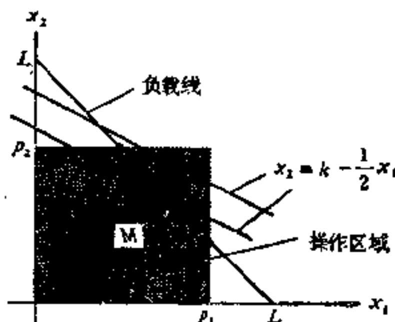


图 A-7

当沿着图 A-7 中箭头方向穿过 $f(x_1, x_2)$的等值线时，$f(x_1, x_2)$的值下降，并在 $x^*=[p_1, L-p_1]^T$达到最小值。因此，$x^*=[p_1, L-p_1]^T$ 表示当负载要求为 L 单位时，两电站的最优操作点。

A-2 在习题 A-1 中，求当负载 L 改变时的最优操作点。

[**解**] 生成功率 x_1、x_2 的总费用用 $f(x_1, x_2)=x_1+2x_2$ 表示。因为第一电站能用一半的费用生产与第二电站相同的功率，所以是更有效率的电站。若 $L\geqslant p_1+p_2$，电站不能供给负载的全部功率要求，因而 L 的变化范围限制在 $0\leqslant L\leqslant p_1+p_2$。

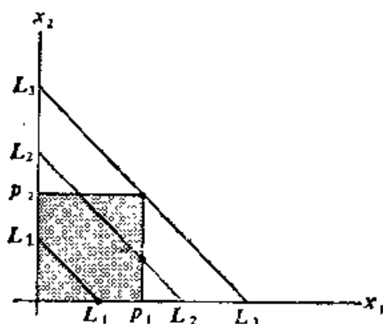


图 A-8

图 A-8 表示出了在区间$[0, p_1+p_2]$上 L 的三个不同值的三条负载线，同时给出了对应的最优操作点。它们是用习题A-1的图解法确定的。从图 A-8 得到

$$x^*=[p_1, 0]^T，当 0\leqslant L\leqslant p_1$$

$$x^*=[p_1, L-p_1]^T，当 p_1\leqslant L\leqslant p_1+p_2$$

$$x^* = [p_1, p_2]^T, \text{当} L = p_1 + p_2$$

这表明优先选运转效率较高的电站，当 $L > p_1$ 时才同时运转另外一个。

A-3 石油精炼用到两个不同的混合过程，每个产品循环的输入输出关系给出如下

过程	输入		输出	
	生油A	生油B	汽油X	汽油Y
1	3	2	1	2
2	2	6	3	1

生油 A、B 的最大可用量分别为60和90单位。市场分析表明，至少30单位的汽油 X 和20单位的汽油 Y 可以销售，并且从过程1和2，每种产品循环的利润分别是1和2单位。我们希望求两个混合过程的最优配合，以便以最大的利润供应汽油市场。

［**解**］ 令 x_1，x_2 分别代表通过过程1和过程2的产品量。生油可利用量的约束可写作

$$3x_1 + 2x_2 \leqslant 60$$

$$2x_1 + 6x_2 \leqslant 90$$

表现汽油销售承诺的约束是

$$x_1 + 3x_2 \geqslant 30$$

$$2x_1 + x_2 \geqslant 20$$

汽油销售所得的总利润由 $f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$ 给出。在满足上述约束的条件下求 f 的极大。

所有可行解的集合在图 A-9 中用阴影区表示。沿图中箭头所示方向穿过 $f(x_1, x_2)$ 的等值线，$f(x_1, x_2)$ 的值上升。

在 $x^*=[12.80, 10.7]^T$达到最大。各产品循环的相应的最优数量由 $x_1^*=12$，$x_2^*=10$ 给出。

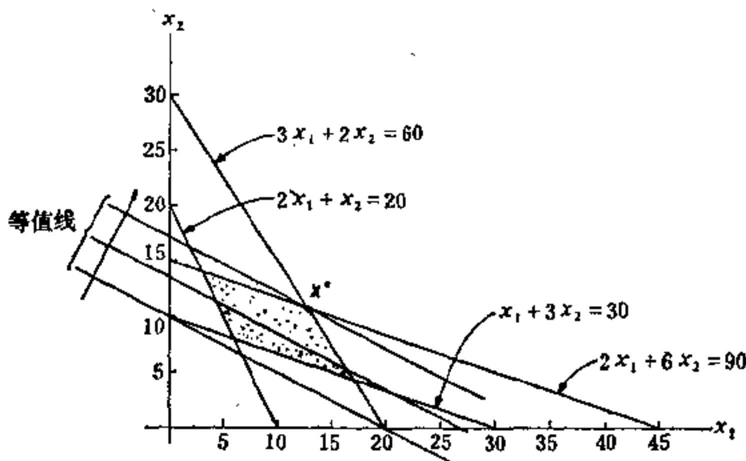


FIGURE A.9

图 A-9

A-4 考虑由 $M=\{x|x\in E^n, Ax\leqslant b, x\geqslant 0\}$定义的可行解集，证明 M 是凸集。

［解］ 令 x^1，x^2 代表 M 的任意两点，定义 $x^3=\lambda x^1+(1-\lambda)x^2$，其中 $0<\lambda<1$。则由 x^3 的构造可知，$x^3\geqslant 0$，并有 $Ax^3=\lambda Ax^1+(1-\lambda)Ax^2\leqslant\lambda b+(1-\lambda)b=b$。于是 $x^3\in M$，因为连接 M 中任意两点的线段包含在 M 中，由此推出 M 是凸集。

A-5 凸集中的一点，如果它不能表示成该凸集的另外两点的凸组合，则称它为凸集的极点。设 M 如习题 A-4 所定义，求证 0 是 M 的极点。

［解］ 设 x^1、x^2是M的任意二点，$x^3=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$，

$0<\lambda<1$。因为 $\mathbf{x}^1$，$\mathbf{x}^2\geqslant 0$，所以 $\mathbf{x}^3\geqslant 0$，且其第 i 分量可写作 $x_i^3=\lambda x_i^1+(1-\lambda)x_i^2$。显然 $x_i^3=0$ 的充要条件是 $x_i^1=x_i^2=0$，于是 $\mathbf{x}^1=\mathbf{x}^2=0$。因此，0 是 M 的极点。

A-6 求 $f(x_1, x_2)=8x_1-4x_2$ 在 M 上的最小值，M 由 x_1，$x_2\geqslant 0$，$x_1-x_2\leqslant 2$ 和 $2x_1-x_2\leqslant 6$ 确定。

［**解**］ 可行解集在图 A-10 中用阴影区域表示。图中同时给出了等值线。这些等值线平行于由 $2x_1-x_2=6$ 给出的约束超平面。从图上的考虑可知，显然直线 $2x_1-x_2=6$ 与直线 $x_1-x_2=2$ 的交点之上的所有点都是最优点。注意在 M 中，x_1^*。x_2^* 的值可以无限地增大而目标函数值却不增加，$f(x_1^*, x_2^*)=6$。

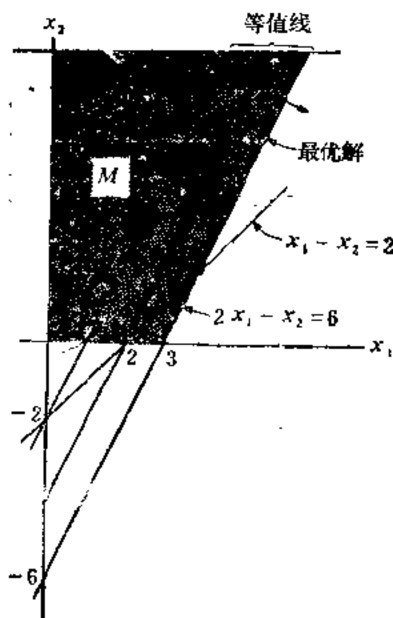


图 A-10

A-7 求例 A-2 中所解的线性规划的对偶问题。

解 在例 A-2 中，约束不等式写作$\mathbf{A}\mathbf{x}\geqslant\mathbf{b}$。为了符合习惯的写法，将约束改写为 $\mathbf{A}\mathbf{x}\leqslant\mathbf{b}$，其中

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -6 & -2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}-4\\ -12\\ -2\end{bmatrix}$$

例 A-2 中的目标函数是 $f(\mathbf{x})=x_1+2x_2$，因而 $\mathbf{c}=[1,\ 2]^T$。由于对偶问题是$\max\limits_{\mathbf{z}\geqslant 0}\ g(\mathbf{z})=-4z_1-12z_2-2z_3$，约束是$-z_1-6z_2+0z_3\geqslant 1$ 和$-z_1-2z_2-z_3\geqslant 2$。因此也可以写成 $\mathbf{A}^T\mathbf{z}\geqslant\mathbf{c}$ 的形式。

A-8 利用在例 A-2 中所得到的最优解及例 A-8 所得的结果，求习题 A-7 中给出的对偶问题的最优解 $\mathbf{z}^*$。

［**解**］ 使用松弛变数 u_1，u_2，$u_3\geqslant 0$ 和 v_1，$v_2\geqslant 0$，原问题和对偶问题的约束可以写作

$$-x_1-x_2+u_1+0u_2+0u_3=-4$$
$$-6x_1-2x_2+0u_1+u_2+0u_3=-12$$
$$0x_1-x_2+0u_1+0u_2+u_3=-2$$

以及

$$-z_1-6z_2+0z_3+v_1+0v_2=1$$
$$-z_1-2z_2-z_3+0v_1+v_2=2$$

将例 A-2 中的 $x_1^*=2$，$x_2^*=2$ 代入原问题的约束方程中，我们有 $u_1^*=u_3^*=0$ 和 $u_2^*=2$。因为 $u_2^*\geqslant 0$，由例 A-8 的结果可知 $z_2^*=0$。使用 x_1^*，$x_2^*>0$ 和例 A-8 的结果又得 $v_1^*=0$，$v_2^*=0$。将 z_2^*，v_1^*，v_2^* 的值代入对偶问题的约束方程，并对z_1，z_3 求解，就有 $z_1^*=-1$ 和 $z_3^*=-1$。因此 $Z^*=[-1,\ 0,\ -1]^T$。

作为验证，我们计算 $f(\mathbf{x}^*)=(\mathbf{c},\ \mathbf{x}^*)=x_1^*+2x_2^*=6$，$g(\mathbf{z}^*)=(\mathbf{b},\ \mathbf{z}^*)=-4z_1^*-12z_2^*-2z_3^*=6$。正如例 A-7 所予断的，有 $f(\mathbf{x}^*)=g(\mathbf{z}^*)$。

A-9 求习题 A-3 中所解的线性规划的对偶问题的最优解。

［**解**］ 用松弛变数 $u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4\geqslant 0$，将原问题的约束写作

$$3x_1+2x_2+u_1=60$$
$$2x_1+6x_2+u_2=90$$
$$-x_1-3x_2+u_3=-30$$
$$-2x_1-x_2+u_4=-20$$

原问题的最优解已在习题 A-3 中给出，有 $x_1^*=12.8$，$x_2^*=10.7$。将 x_1^*，x_2^* 的值代入到原问题的约束方程中，有 $u_1^*=0.2$，$u_2^*=0.2$，$u_3^*=14.9$ 以及 $u_4^*=16.3$。因为 u_1^*，u_2^*，u_3^*，$u_4^*>0$，用例 A-8 的结果有 $z_1^*=z_2^*=z_3^*=z_4^*=0$。

其次，用例 A-7 的结果检验这一答案。由习题 A-3 有 $f(\mathbf{x}^*)=32$，并且这时显然 $g(\mathbf{z}^*)=0$。因为 $f(\mathbf{x}^*)\neq g(\mathbf{z}^*)$，我们断定原先得出的 $\mathbf{z}^*$ 值是不正确的。回头来检查，发现 u_1^*，u_2^* 几乎等于 0，怀疑是计算误差所致。令 $u_1^*=u_2^*=0$，这意味着 z_1^*，z_2^* 不再是 0。因为 x_1^*，$x_2^*>0$，从例 A-8 可知，在对偶问题中 $v_1^*=v_2^*=0$，将 z_3^*，z_4^*，v_1^*，v_2^* 的这些值代入到对偶问题的约束方程中

$$3z_1+2z_2-z_3-z_4+v_1=1$$
$$2z_1+6z_2-3z_3-z_4+v_2=1$$

并对 z_1^*，z_2^* 解出，有 $z_1^*=\dfrac{1}{7}$，$z_2^*=\dfrac{2}{7}$，$g(\mathbf{z}^*)=34.2$。

因为 $g(\mathbf{z}^*)$ 现在合理地接近于 $f(\mathbf{x}^*)$，我们接受

$z^* = \left[\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, 0, 0\right]^T$ 作为对偶问题在计算误差界限范围内的最优解。

补充题

A-10 考虑制定费用最少的每日食谱的问题。食物由两种食品组成，每天的食物要求满足成年人平均对蛋白质、脂肪和碳水化合物的需求。有关的数据在下表中给出：将此叙述为一个线性规划问题并求其最优解。

食物类型	每单位产生			每单位费用
	脂肪	碳水化合物	蛋白质	
1	2	1	6	1
2	4	5	1	2
每天最低需求	8	5	12	

A-11 求 $f(x_1, x_2) = \min[3x_1 - 12, -4x_1 + 5]$ 在条件 $0 \leqslant x_1 \leqslant 5$ 下的最大值。

A-12 用单纯形法求 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3$ 的最大值。并服从约束 $x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$，$x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 400$，$3x_1 + 2x_2 \leqslant 420$，$x_1 + 4x_2 \leqslant 450$。

A-13 求 $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$ 的最大值，并服从 $x_1, x_2 \geqslant 0$，$5x_1 + 4x_2 \geqslant 100$，$3x_1 + 5x_2 \leqslant 150$，$5x_1 + 4x_2 \leqslant 200$。

参 考 文 献

第一章 最优化问题

Arrow, Kenneth J., L. Hurwicz, and H. Uzawa. *Studies in Linear and Non-Linear Programming*. Stanford University Press, 1958.

Beveridge, G.S., and R.S. Schechter. *Optimization Theory and practice*. New York: McGraw-Hill, 1970.

Birkhoff, G., and S. Maclane. *A Survey of Modern Algebra*. New York: Macmillan, 1941.

Dorn, W.S. Non-linear programming-a survey. *Management Science*, 9(1963): 171-208.

Hadley, G *Linear Algebra*. Reading: Addison-Wesley, 1961, Chap.6.

Hohn, Franz. E. *Elementary Matrix Algebra* (2nd ed.). New York: Macmillan, 1964.

Valentine, F. A. *Convex Sets*. New York: McGraw-Hill, 1964.

Zadeh, L. A. *Linear System Theory: The State Space Approach*. New York: McGraw-Hill, 1963. Appendix C.

Zoutendijk, G. Nonlinear programming: a numer-

ical survey. *SIAM J. on Control*. 4(1966): 194-210.

第二章 古典最优化

Buck, R.C. *Advanced Calculus*. New York: McGraw-Hill. 1956.

Cooper. L., and D. Steinberg. *Introduction to Methods of Optimization*. Philadelphia: Saunders. 1970.

Coxeter, H.S. M. The golden section, Phyllotaxis, and Wythoff's game. *Scripta Mathematica*(1954): 135-43.

Hancock, H. *Theory of Maxima and Minima*. New York: Cinn and Company. 1917.

Smail, L. L. *Calculus*. New York: Appleton-Century, 1949.

Wilde, D. J. Differential calculus in nonlinear Programming. *Opns. Res.*, 10(1962). 764-73.

Wilde, D.J. Jacobians in constrained nonlinear optimization. *Opns. Res.* 13(1965): 848-56.

第三章 约束和Lagrange乘子

Adby, P. R., and M. A. Dempster. *Introduction to Optimization Methods*. New York: Halsted Press. 1974.

Brooks. R., and A. M. Geoffrion. Finding

Everetts'Lagrange multipliers –by linear programming. *Operations Research*, 14(1966): 1149-1153.

Evertt, High, III. Generalized Lagrange multiplier method for solving problems of optimum allocation of resources. *Operations Research*, 11(1963): 399-417.

Gottfried, B. S., and J. Weisman. *Introduction to Optimization Theory*. Englewood Cliffs: prentice-Hall, 1973.

Intriligator, M. D. *Mathematical Optimization and Economic Theory*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1971.

John, F. Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions. In *Studies and Essays (Courant Anniversary Volume)*. New York: Interscience, 1948. 187-204.

Kunzi, H. P., et. al. *Numerical Methods of Mathematical Optimization with ALGOL and FORTRAN programs*. New York: Academic press, 1968.

Pierre, D. A. *Optimization Theory with Applications*. New York: Wiley, 1969.

Russell, D. L. *Optimization Theory*. Reading: Addison-Wesley, 1970.

Wilde, D. J., and C. S. Beightler. *Foundations of Optimization*. Englewood Cliffs: pre-

ntice-Hall, 1967.

第四章 不等式约束最优化

Bernholtz, B. A new derivation of the kuhn--Tucker conditions. *Operations Research*, 12 (1964): 295–299.

Burley, D. M. *studies in Optimization*. New York: Halsted press, 1974.

Cottle, Richarp W. Nonlinear programs with positively bounded Jacobians. *Slam J. on Applied Mathematics*, 14 (1966): 147–158.

Hadley G. *Nonlinear and Dynamic programming*. Reading: Addison–wesley, 1964.

Huard. Pierre. Dual programs. *In Recent Advances in Mathematical programming* (Robert L. Graves and philip Wolfe, eds.). New York: McGraw–Hill, 1963, pp.55–62.

Kuhn. H W., and A. W. Tucker. *Linear Inequalities and Related Systems*. princeton University press, 1956.

Kuhn, H. W., and A. W. Tucker. Nonlinear programming. In *proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and probability* (J. Neyman. ed.). University of California press, 1951, pp.481–492.

Mangasarian. O. L. *Nonlinear programming*.

New York: McGraw-Hill, 1969.

Tucker, A. W. Linear and nonlinear programming. *Operations Research*, 5(1957): 244-257.

Whittle, *P. Optimization under Constraint: Theory and Applications of Nonlinear programming.* New York: Wiley. 1971.

Wolfe. Philip. A duality theorem for nonlinear programming. *Quarterly of Applied Mathematics*, 19(1961): 239-244.

第五章 一维搜索法

Fibonacci, Leonardo. *Algebra et almuchabala(liber abbaci)*(1202). Cited in Bell. E. T.. *The Development of Mathematics*. New York: McGraw-Hill, 1940, p. 160.

Johnson, S. M. *Optimal Search for a Maximum in Fibonaccian*, RAND Corporation Report, 1956, *p*.856.

Murray, W. (ed.) *Numerical Methods for Unconstrained Optimization*. New York: Academic press, 1972.

Newman, D. J. Location of the maximum on unimodal surfaces. *J. Assn. Comp. Mach.*, 12(1965) :395-98.

Oliver, L. T., and D. J. Wilde. Symmetric sequential minimax search for a maximum.

Fibonacci Quart., (1964): 169-75.

Pun, L. *Introduction to Optimization Practice.* New York: Wiley, 1969.

Veinott, Arthur F., Jr. The supporting hyperplane method for unimodal programming. *Operations Research*, 15(1967): 147-152.

Wilde, D. J. *Optimum Seeking Methods.* Englewood Cliffs: prentice-Hall, 1964.

第六章　无约束梯度法

Adabie, J. (ed.). *Nonlinear programming.* **Amsterdam: North-Holland, 1967.**

Box, G. E. P., and K. B. Wilson. On the experimental attainment of optimum conditions. *J. Roy. Stat. Soc.* B13(1951): 1.

Box, G.E. P. The exploration and exploitation of response surfaces. *Biometrics*, 10(1954): 16.

Buehler, R. J. B. M. Shah, and O. Kempthorne. Some properties of steepest ascent and related procedures for finding optimum conditions. Iowa State University Statistical Lab., Ames, Iowa, April 1961.

Graves, Robert L., and Philip Wolfe. *Recent Advances in Mathematical Programming.* New York: McGraw-Hill, 1963.

Kowalik, J., and M. R. Osborne. *Methods for Unconstrained Optimization Problems*. New York: Elsevier North-Holland, 1969.

McCormick, Garth P., Anti-zig-zagging by bending.*Management Science*, 15(1969):315-320.

Wolfe, Philip. Accelerating the cutting plane method for nonlinear programming, *SIAM J.on Applied Mathematics*, 9(1961): 481-488.

第七章　约束梯度法

Apostol, T. M. *Mathematical Analysis*.Reading: Addison-Wesley, 1957.

Box, M.M. *Nonlinear Optimization Techniques*. New York: Longman, 1969.

Fletcher, R., and M. J. D. Powell. A rapidly convergent descent method for minimization. *Comp.J.* 6(1963), 163-68.

Cill, P.E., and W.Murray. *Numerical Methods for Constrained Optimization*. New York: Academic Press, 1974.

Hasdorff. L. *Gradient Optimization and Nonlinear Control*. New York: Wiley, 1976.

Jacoby. S. L. *Iterative Methods for Nonlinear Optimization Problems*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1972.

Kelley, J. E., Jr. The cutting plane method

for solving convex Programs. *J. Soc. Ind. Appl Math*, 8(1960): 703-712.

Powell. M. J. D. Method for minimjzing a sum of squares of nonlinear functions without calculating derivatives. *Comp. J.* 7(1965): 303-307.

Powfil. M. J. D. An efficient method for finding the minimum of a function of several Variadles without calculating derivatives. *Comp. J.*, 7(1964): 155-162.

Rosen, J. B. The gradient projection method for nonlinear programming, Part I. Linear constraints. *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, 8(1960): 181-217.

Rosen, J. B The gradient projection method for nonlinear programming, Part II, Nonlinear constraints. *J. Soc. Ind. & Appl. Math.*, 9(1961): 514-532.

Rosenbrock, H. H. An automatic method for finding the greatest or least value of a function. *Comp. J.*, 3(1960), 175-184.

Shah. B. V., R. J. Buehler, and O. Kempthorne. Some algorithms for minimizing a function of several variadles. *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, 12(1964): 74-92.

Wagner. Harvey M. *Principles of Operations Research*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall 1969.

Zoutendijk, G. *Methods of Feasible Directions.* Amsterdam: Elsevier, 1960.

第八章 惩罚函数法

Beltrami. E. J. *An Algorithmic Approach to Nonlinear Analysis and Optimization.* New YorK: Academic Press. 1970.

Fiacco. A. F., and G. P. McCormick. Computational algorithm for the sequential unconstlained minimization technique for nonlinear programming. *Man. Sci.*, 10(1964): 601-617.

Fiacco. A. F., and G. P. McCormick. *Nonlinear programming, Sequential Unconstrained Minimization Techniques.* New YorK: Wiley, 1968.

Hartley. H. O. Non-linear programming by the simplex method. *Econometrica,* 29 (1961): 223-237.

Hartley, H. O., and R. R. Hocking. Convex programming by tangential approximation. *Management Science.* 9(1963): 600-612.

Kiefer. J. Optimum sequential search and approximation methods under minimum regularity assumptions. *SIAM J. on Applied Mathematics.* 5(1957): 105-136.

Lavi. A. and T. P. Vogl(eds.) *Recent Advances in Optimization Techniques.* New York: Wiley.

1966.

Martos, Bela. Hyperbolic programming. *Naval Research Logistics Quarterly*, II(1964): 135-155.

Pierskalla, W. P. Mathematical programming with increasing constraint functions *Management Science*. 15(1969): 416-425.

Saaty, T. L. and J. Bram. *Nonlinear Mathematics*. New York: McGraw-Hill, 1964, pp. 168-170

第九章　二次收敛的极小化算法

Arrow, Kenneth J., and A. C. Enthoven. Quasi-concave programming. *Econometrica*, 29(1961): 779-800.

Davidon, W. C. Variable metric method for minimization. *A. E. C. Research and Development Report*. ANL-5590, 1959.

Davidon, W. C. Variable metric method for minimization. *A. E. C. Research and Development Report*, ANL-5990(Rev), 1959.

Fletcher, R., and M. J. D. Powell. A rapidly convergent descent method for minimization. *Computer Journal*, 6(1963): 163-68.

Fletcher, R., and C. M. Reeves. Function minimization by conjugate gradients. *Comp-*

uter Journal, 7(1964): 149-154.

Hestenes, M. R., and E. Stiefel. Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *J. Res. Nat. Bur Standards*, 49(1952).

Hooke, R., and T. A. Jeeves. Direct search solution of numerical and stati sti cal problems. *J. of Assn. Computing Mach.*, 8(1961).

Powell, M J.D. An effcient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives. *Computer Journal*, 7(1964): 152-162.

Topkis, Donald M., and Arthur F. Veinott, Jr. On the convergence of some feasible direction algorithms for nonlinear programming *SIAM J. on Control*. 5(1967): 268-279.

Whinston, A. Conjugate functions and dual programs. *Naval Research Logistics Quarterly*, 21(1965): 315-322.

Zangwill, W. I. *Nonlinear programming*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1969.

第十章 二次规划

Beale, E. M. L. On quadratic programming. *Naval Research Logistics Quarterly*, 6(1969): 227-243

Beale, E. M. L. Note on a comparison of two

methods of quadratic programming. *Operations Research*, 14(1966).

Boot, J.C.G On sensitivity analysis in convex quadratic programming problems. *Operations Research*, 11(1963): 771-786.

Bracken, J., and G.McCormick. *Selected Applications of Nonlinear Programming*. New York: Wiley, 1968.

D'Espo, D.A convex programming procedure. *Naval Research Logistics Quarterly*, 6(1959): 33-42.

Dorn, W.S.Self dual quadratic programs. *SIAM J.of Applied Mathematics*, 9(1961): 51-54.

Frank, Marguerite, and Philip Wolfe. An algorithm for quadratic programming. *Naval Research Logistics Quarterly.* 3(1956) 95-110.

Hildreth, C.G.A quadratic programming procedure, *Naval, Research Logistics Quarterly*, 4 (1957): 79-85.

Houthakker, H. S. The capacity method of quadratic programming. *Econometrica*. 28(1960): 62-87.

Kriebel. Charles H. Coefficient estimation in quadratic programming models. *Management* Science. 13(1967): B-473-B-486.

Kunze. H. p. and W. Krelle. *Nonlinear pro-*

gramming. Waltham, Mass: Blaisdell, 1966.
Lemke, C. E. A method of solution for quadratic programs. *Management Science*, 8(1962): 442–453.
Theil, H., and C. Van de Panne. Quadratic programming as an extension of conventional quadratic maximization. *Journal of the Institute of Management Science*, 7(1961): 1–20.
Wolfe, P. The simplex method for quadratic programming. *Econometrica*. 27(1959): 382–398.

第十一章 整数规划

Abadie. J. (ed). *Integer and Nonlinear programming*. Amsterdam: North-Holland. 1970.
Alcaly. R. E. and A K. Klevorick. A note on the dual prices of integer programs. *Econometrica*. 34(1966): 206–214.
Balas. E. An additive algorithm for solving linear programs with zero-one variables. *Operations Research*. 13(1965): 517–544.
Balinski. M. L. Integer programming: methods, uses. computation. *Management Sciences*, 12 (1965): 253–313.
Belimore. M., and G. L. Nemhauser. The traveling salesman problem: a survey *Operations Research*. 16(1968): 538–558.

Caboi. A. Victor, and Arthub P Hurifr Jr. An approach to zero-one integer programming *Operations Research*. 16(1968): 1206-1211.

Cooper. L., and C. Drebes. An approximate solution method for the fixed charge problem *Naval Research Logistics Quarterly*. 14(1967): 101-113.

Efroymson. M. A., and T. L. Ray A branch-bound algorithm for plant locations. *Operations Research*, 14(1966): 361-368.

Gavefi, F. W. and N. V. Plyler. The optimal assignments of facilities to locations by branch and bound. *Operations Research*, 14(1966): 210-232.

Gfoffrion. Arihur M Integer programming by implicit enumeration and Balas' method. *SIAM Reciew*. 9(1967): 178-190.

Giovfr. Fred. Surrogate constraints. *Operations Research*. 16(1968): 741-749.

Giover. Fred A muluphase lual algorithm forzero one integer programming problems. *Operations Research*. 13(1965): 879-919.

Glover. Fred. A new foundation for a simplified primal integer programming algorithm. *Operattons Research*. 16(1968): 727-740.

Gomory. R. E. An algorithm for integer solutions to linear programs. In *Recent Advances*

in *Mathematical programming*(F.L.Graves and P.Wolfe,eds.)New York,McGraw-Hill.1963. pp.269-302.

Gomory,R.E.Outline of an algorithm for integer solutions to linear programs.*Bull. Amer. Math.Soc.*64(1958): 275-278.

Gomory, R.E.On the relation between integer and noninteger solutions to linear programs.*National Academy of Sciences*,53(1965): 260-265.

Graves, G.W., and A.Whinston.A new approach to discrete mathematical problems. *Management Science*, 11(1964)308-315.

Hu, T.C.*Integer programming and Network Flows*.Reading, Addison-Wesley.1969.

Murty, K.G.*Linear and Combinatorial programming*.New York, Wiley.1976.

Muth, J.F., and G.L.Thompson. *Industrial Scheduling*.Englewood Cliffs, prentice-Hall, 1963.

Saaty, T.L.*Optimization in Integers and Related External problems*.New York, McGraw-Hill, 1970.

第十二章 动态规划

Airs, R.*Discrete Dynamic programming*. New

York: Blaisdell, 1964.

Bellman, R.E., and S.Dreyfus. *Applied Dynamic programming* princeton University press, 1967.

Bellman, R.E. *Dynamic programming*. princeton University press. 1957.

Breiman, Leo Stopping-rule problems. In *Applied Combinatorial Mathematics* (Edwin F. Beckenbach, ed.). New York: Wiley, 1964, pp. 284–319.

Dan, S. *Nonlinear and Dynamic programming: An Introduction*. New York: Springer Verlag, 1975.

Derman, Cyrus, and G.J. Lieberman. A Markovian decision model for a joint replacement and stocking problem. *Management Science*, **13(1967): 609–617.**

Greenberg, H. J. The use of branching in dynamic programming for parametric analysis. *Operations Research*, 15(1967): 976–977.

Howard, Ronald. *Dynamic programming and Markov processes*. M.I.T. press. 1960.

Karp, Richard M., and M. Held Finite-state processes and dynamic programming. *SIAM J. on Applied Mathematics*, 15 (1967): 693–718.

Karush, William. On a class of minimum-

cost problems. *Management Science*, 4(1958): 136-153.

Kaufmann, A. *Graphs, Dynamic programming and Finite Games* New York: Academic press, 1967.

Larson, R. E. *State Increment Dynamic programming*. New York: Elsevier North-Holland, 1968

Martin, J. J. *Bayesian Decision problems and Markov Chains*. New York: Wiley. 1967.

Newhauser, G. L. *Introduction to Dynamic programming*. New York Wiley. 1966.

Veinott, Arthur F., Jr., and Harvey M. Wagner. Optimal capacity scheduling-I. *Operations Research*, 10(1962): 518-532.

Veinott, Arthur F. Jr., and Harvey M. Wagner. Optimal capacity scheduling-II. *Operations Research*, 10(1962): 533-546.

White, D. J. *Dynamic programming*, San Francisco: Holden-Day. 1969.

Wong, Peter J., and David G. Luenberger. Reducing the memory requirements of dynamic Programming. *Operations Research*, 16(1968): 1115-1125.

第十三章　大规模规划

Dantzig, G. B., and Philip Wolfe. Decomposition

principle for linear programs. *Operations Research*, 8(1960), 101–111.

Geoffrion, Arthur M. Reducing concave programs with some linear constraints. *SIAM J. on Applied Mathematics*, 15(1967): 653–664.

Himmelblau. D. M. *Decomposition of Large-Scale problems*. New York, Elsevier North-Holland, 1973.

Lasdon, L. S. *Optimization Theory for Large Systems*. New York, Macmillan, 1970.

Rosen, J. B., and J. C. Ornea. Solution of nonlinear programming problems by partitioning. *Management Science*, 10(1963): 160–173.

Sanders, J. L. A nonlinear decomposition principle. *Operations Research*, 13(1965), 266–271.

Wismer, D. A. (ed). *Optimization Methods for Larde Scale Systems*. New York, McGraw-Hill, 1971.

附录 线性规划

Beale, E. M. L. *Mathematical programming in practice*. London, pitman, 1968.

Dantzig, G. B. *Linear programming and Extensions*. princeton University press, 1963.

Dantzic, G. B., L. R. Ford, and D. R. Fulkerson. A primal-dual algorithm for linear pr–

ogramming. In(H.W.Kuhn and A.W.Tucker, eds.).*Linear Inequalities and Related Systems* princeton University press, 1956.

Frazer, J.R.*Applied Linear programming.*Englewood Cliffs: prentice-Hall, 1968.

Garvin, W. W. *Introduction to Linear programming.*New York: McGraw-Hill, 1960.

Gass.S.I.*Linear programming Methods and Applications*(3rd ed.).New York:McGraw-Hill,1969.

Hadley, G.*Linear programming.*Reading: Addison-Wesley, 1962.

Lemke, C. E. The dual method of solving the linear programming problem.*Naval Research Logistics Quarterly*, 1(1954): 36-47.

Orchard-Hays, W. *Advanced Linear programming Computing Techniques.*New York: McGraw-Hill.1968.

Vaida, S. *Mathematical programming.*Reading: Addison-Wesley, 1961.

补充题答案

第一章

1-18 (a) $[x_1\ x_2]\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix}2 & -2\\ -2 & 8\end{bmatrix}$

(d) 是

(e) $z=12x_2-12$

1-21 (a) 和 (b)

1-22 (a) $\begin{bmatrix}\dfrac{3}{x_2}+\dfrac{4}{x_2} & e^{x_1/x_2}\\ -\dfrac{3x_1}{x_2^2}-\dfrac{4x_1}{x_2^2} & e^{x_1/x_2}\end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix}-x_2^{-1} & x_1^{-2}\\ -x_1^{-1} & x_2^{-2}\end{bmatrix}$

1-23(a)

$$\begin{bmatrix}\dfrac{4}{x_2^3}e^{x_1/x_2} & -\dfrac{3}{x_2^2}-\dfrac{4}{x_2^2}\left(1+\dfrac{x_1}{x_2}\right)e^{x_1/x_2}\\ -\dfrac{3}{x_2^2}-\dfrac{4}{x_2^2}\left(1+\dfrac{x_1}{x_2}\right)e^{x_1/x_2} & \dfrac{6x_1}{x_2^3}+\dfrac{4x_1}{x_2^3}\left(2+\dfrac{x_1}{x_2}\right)e^{x_1/x_2}\end{bmatrix}$$

(b) $\begin{bmatrix} 2x_1^{-3}x_2^{-1} & (x_1x_2)^{-2} \\ (x_1x_2)^{-2} & 2x_1^{-1}x_2^{-3} \end{bmatrix}$

1-24 (a) 不定

(b) 不定

(c) 不定

1-25 (a)

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ \frac{1}{2} & 3 & \frac{1}{2} \\ \frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{q}=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(b)\mathbf{H}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{q}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$$

1-26 $\mathbf{x}^*=\begin{bmatrix} 9/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$

1-27 $\mathbf{x}^*=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

1-28 $\mathbf{x}^*=\begin{bmatrix} 3/2 \\ 9/4 \end{bmatrix}$

1-29 $\mathbf{x}^*=\begin{bmatrix} 10/3 \\ 5/3 \end{bmatrix}$

1-30 $\mathbf{x}^*=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

第二章

2-12 (a) $x^* = \begin{bmatrix} -23.5 \\ 5.5 \\ 8 \end{bmatrix}$

(b) $x^* = \begin{bmatrix} 11 \\ 95 \\ 78 \end{bmatrix}$

(c) $x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

2-13 (a)最小

(b)最小

(c)鞍点

2-14 $[0, 0]^T$; $\left[\frac{a_1^4}{a_2^2}, \frac{a_1^3}{a_2^2}\right]^T$; $\left[\frac{3a_1^4}{8a_2^2}, \frac{a_1^2}{2a_2^2}\right]^T$

2-15 $h_{11} < 0$

$h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} > 0$

2-16 (a)在 0 点有拐点

在27/12处有极大

(b)在 2 处有极小

2-17 不存在

2-18 $x^* = 0$

2-19 没有有限的极大或极小

2-20 $\frac{圆周长}{正方形周长} = \frac{\pi}{16}$

2-21 $[6, 6, 3]^T$

2-22 $\begin{bmatrix} -5 \\ 7/2 \end{bmatrix}$

2-23 $\sqrt{1.2}-1.1$

2-24 $\sqrt{1.2}-1.095$

2-25 $\ln(1.05)-0.04875$

2-26 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{x_n e^{n}-2}{(x_n+1)e^{x_n}}$

2-27 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{\sin x_n-\dfrac{x_n+1}{x_n-1}}{\cos x_n+\dfrac{2}{(x_n-1)^2}}$

2-28 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{x_n^3+5x_n^2-6x_n+4}{3x_n^2-10x_n-6}$

2-29 $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}-\left(\dfrac{x_n y_n}{36\times 10^6}\right)$

$$\begin{bmatrix} 1-3000x_n^{-2}y_n^{-1} \\ 2-4000x_n^{-1}y_n^{-2} \end{bmatrix}$$

第三章

3-14 $T_{n+1}=T_n-\dfrac{e^{T_n}(e^{T_n}-2)+T_n}{e^{T_n}(2e^{T_n}-2)+1}$

3-15 $\left[\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\ \sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right]^T$

3-16 $[\sqrt{1/2},\ \sqrt{1/2}]^T$

3-17 $[2,\ 2]^T$

3-20 $[\sqrt{1/2},\ \sqrt{1/2}]^T$

3-21 $[-16, 12]^T$

3-22 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]^T$

3-23 $c_1 \geqslant 4/3$

第四章

4-18 原问题解 $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]^T$

对偶问题解$[0, 1]^T$

4-19 $2\sqrt{2}$

4-22 否

4-24 否

4-25 是

4-26 $[5, 1]^T$

4-28 $a_1 \geqslant 4/3$

第五章

5-17

试　验	a_i^t	$f(a^t)$	b^t	$f(b^t)$
1	21/13	−3.048	18/13	−2.93
2	23/13	−2.981	20/13	−3.0353
3	22/13	−3.0305		
$L_6=1/13$				

5-18 (a) 6

(b) 5

5-19 $\hat{\lambda}=0.3$

$\lambda^*=0.5$

第六章

6-14

迭 代	$[x^p]^T$	K_p^*	$[x^{p+1}]^T$
1	$[2, -1, 1]$	3/8	$\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$
2	$\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$	3/10	$\left[-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{10}\right]$
3	$\left[-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{10}\right]$	3/8	$\left[-\frac{1}{20}, -\frac{1}{20}, -\frac{1}{20}\right]$
4	$\left[-\frac{1}{20}, -\frac{1}{20}, -\frac{1}{20}\right]$	3/10	$\left[-\frac{1}{50}, -\frac{1}{50}, -\frac{1}{100}\right]$

6-15

迭 代	$[x^p]^T$	K_p^*	$[x^{p+1}]^T$
1	$[2, -2, 1, -1]$	1/2	$[0, 0, 0, 0]$

第七章

7-22　　$P = I$

　　P的秩＝紧约束个数

7-23　　A有秩m

第八章

8-9　　$x^* = [0, 0]^T$

8-10　　$x^* = [1/2, 3/2]^T$

8-11　　$x^* = [3, 2]^T$

第九章

9-11　　$x^* = [0, 1]^T$

第十一章

11-9　(1，3，4，2，1)

11-10　物品3，物品1，物品2

11-11　$X^* = [0, 3]^T$

11-12　$X^* = [3, 1]^T$

第十二章

12-16　提示：见例12-4和例12-5.

12-17　提示：见习题12-14.

12-20　提示：见习题12-12

12-21　提示：见习题12-13.

附录页